微分積分学 **AD I**, 数学序論演習 **I**　　2002 年 4 月 12 日

授業計画
教科書 (吹田・新保著 理工系の微分積分学) におおよそ沿って、

- 第 1 章　極限と連続性
- 第 2 章　微分とその応用
- 第 3 章　不定積分と微分方程式
- 第 4 章　定積分とその応用

について講義をする。
教科書のみでは不足と思われる場合はハンドアウトを配布し補足を行う[1]。また必要に応じて今年度の数学序論の教科書 (荷見・堀内著 現代解析の基礎) も参照する[2]。

授業の進め方と成績について
微分積分学 AD I, 数学序論演習 I を週 2 コマの授業と見なし、3 回から 4 回の講義に対し 1 回のテストを行うという形で授業を進める。成績はそのテストの合計点によって決まる。ただし、微分積分学 AD I と数学序論演習 I の両方がともに合格かともに不合格かのどちらかである。(優良可の成績については同じ評価とは限らない。)
1 回目のテストは 5 月 6 日の予定である。(その前に小テストを行うかもしれない。) それ以降のテストの日程は決まり次第連絡をする。試験の範囲は遅くとも一週間前の授業には明らかにする。

質問の受け付け (オフィスアワー)
火曜日・金曜日の授業終了後および月曜日・水曜日の午前 9 ~ 10 時に受けつける。[3]
上記の時間は必ず教室または研究室にいる (休暇や出張中の場合を除く) の意味で、上記以外の時間に質問に研究室を訪ねても構わない (必ずしも研究室にいるとは限らない)。

演習書について
数学の勉強において問題の演習は欠かせない。演習問題をハンドアウトとして配布する予定であるが、特に 1 年次は解答や証明の書き方を習得する必要がある。このため、解答の詳しく書かれている演習書 (例えば 野本・岸著 「 解析演習 」サイエンス社) を購入して学習することを強く勧める。

§1 実数の補足問題 [4]

1.　次の集合 A に対し、$\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$ を求めよ。

(1)　$A = \{\, x \in \mathbf{R} \,|\, -1 < x \leq 1 \,\}$　　(2)　$A = \{\, x \in \mathbf{R} \,|\, |x - a| < 1 \,\}$

(3)　$A = \{\, x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < |a| + 1 \,\}$　　(4)　$A = \{\, r \in \mathbf{Q} \,|\, -1 \leq r \leq \sqrt{2} \,\}$

(5)　$A = \left\{ (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$　　(6)　$A = \left\{ n \sin \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

2.　$A, B \subset \mathbf{R}$ に対し $A \subset B$ であれば

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

を証明せよ。

3.　$A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ に対し

$$B = \{\, -x \,|\, x \in A \,\}$$

とおく。このとき、

$$\sup B = -\inf A, \qquad \inf B = -\sup A$$

を証明せよ。ただし、$-(-\infty) = \infty$, $-(\infty) = -\infty$ と約束する。

(裏面もあります)

---

[1] ハンドアウトは配布する当日以外は授業の教室に持ってこない。後日必要になった者は杉浦の研究室 514-b 室に取りに来ること。配布より一月以上過ぎたハンドアウトは処分するので注意すること。尚、ハンドアウトはテスト問題やその解答とともにインターネット上の杉浦のホームページ (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/index.html) から随時ダウンロードできるよう更新する予定である。

[2] 昨年の数学序論の教科書でもあった。

[3] 授業終了後は教室で、月水については研究室に来て下さい。もし研究室にいない場合 408 室を探してください。

[4] 教科書の問 1–4 と p.31–の演習問題 **A**, **1**, **2** と **B**, **18** も解いておくこと。

解答: **1** $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$ の順に (1) $1, -1, 1$, 存在しない (2) $a+1, a-1$, 存在しない, 存在しない (3) $|a|+1, |a|-1$, 存在しない, 存在しない (4) $\sqrt{2}, -1$, 存在しない, -1 (5) $1, -1$, 存在しない, 存在しない (6) $1, \sin 1$, 存在しない, $\sin 1$
2,3,4 は略

4. A を開集合 $(0,\infty)$ に含まれる空でない部分集合とし

$$B=\left\{\left.\frac{1}{x}\,\right|\,x\in A\right\}$$

とおく。このとき、

$$\sup B=\frac{1}{\inf A},\qquad \inf B=\frac{1}{\sup A}$$

を証明せよ。ただし、$\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$ と約束する。

§2 数列の補足問題 [5]

5. $x,y\in\mathbf{R}$ に対し次を示せ。

(1) $\max\{x,y\}=\dfrac{(x+y)+|x-y|}{2}$ (2) $\min\{x,y\}=\dfrac{(x+y)-|x-y|}{2}$

6. (1) $x,y\in\mathbf{R}$ に対し $\big(|x|-|y|\big)^2\le\big(x-y\big)^2$ を示し、$\big||x|-|y|\big|\le\big|x-y\big|$ を示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$ を示せ。

7. 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し、次の性質を示せ。また、(1),(2) を用いて (3) を解け。

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\alpha$ を示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$ を示せ。

(3) (a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2+\dfrac{1}{1}\right)\left(2+\dfrac{1}{2}\right)\cdots\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}$ (b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$

8. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ から、$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$ を導け。

9. $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}({a_n}^2+2)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $0<a_1<1$ のとき $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示し $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を示せ。

(2) $a_1>1$ の場合どうなるか考察せよ。(ヒント：$1<a_1<2$, $a_1=2$, $a_1>2$ と場合わけせよ。)

10. $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$ よって定義される数列 $\{a_n\}$ に対し、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

11. $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_1+\cdots+a_n}$ $(n\in\mathbf{N})$ とする。$\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示し $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

12. 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。

(1) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}$ (2) $\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ (3) $\dfrac{\cos n\theta}{n}$ (θ は定数)

(4) $\dfrac{1}{n^3}\{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n\cdot(n+1)\}$ (5) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$ (6) $\dfrac{n!}{n^n}$

(7) $\dfrac{a^n}{n!}$ $(a\in\mathbf{R})$ (8) $\sqrt[n]{n}$ (9) $(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$ (10) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

13. 数列 $\{a_n\}$ に対し次の定数 c, $0\le c<1$, の存在を仮定する。

$$\forall n\ge2\text{ に対し }|a_{n+1}-a_n|\le c|a_n-a_{n-1}|$$

このとき、$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを証明せよ。

---

[5] 教科書の問 5–13 と p.31–の演習問題 **A**, **3–11** と **B**, **19–24** も解いておくこと。
解答: **5,6,7,8,9,13** は略 **10** $(-1+\sqrt{5})/2$ **11** 0 **12** (1) 0 (2) 2 (3) 0 (4) 1/3 (5) $1/e$ (6) 0 (7) 0 (8) 1 (9) 3 (10) 0