

1. 次の 3 重積分の値を求めよ。

$$(1) \iiint_D x^3 y^2 z \, dx \, dy \, dz \quad D = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1 \}$$

$$(2) \iiint_D x \, dx \, dy \, dz \quad D = \{ (x, y, z) \mid x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

$$(3) \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz \quad D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4x \}$$

(ヒント : 円柱座標を用いよ。)

2. $D = \{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1 \}$, $D_n = \{ (x, y) \mid 1/n \leq x \leq 1, |y| \leq n \}$ ($n = 1, 2, \dots$)
とおくとき、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ を示せ。

3. 次の広義積分の値を求めよ。ただし、用いた近似増加列を明示せよ。(それが近似増加列になることは示さなくてもよい。)

$$(1) \iint_D (x - y)^{-1/3} \, dx \, dy \quad D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y < x \leq 1 \}$$

$$(2) \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2 - 2xy - 2y^2} \, dx \, dy$$

$$(3) \iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \quad D = \{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

4. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。

5. \mathbf{R}^4 の領域 $D = \left\{ (x, y, z, w) \mid |x + y + z + w| \leq 2, |x - y| \leq 1, |x + 3z| \leq 1, |y + z + 2w| \leq 1 \right\}$ の体積を求めよ。

(ヒント : $\iiint_D dx \, dy \, dz \, dw$ を求めればよい。)