微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 2 回目　出題日 2001 年 11 月 20 日

1. 集合 $U = \{ (x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合であり、閉集合ではないことを定義より示せ。ただし、集合 U が開集合であるとは任意の点 $\mathbf{p} = (a, b) \in U$ に対し $B_r(\mathbf{p}) \subset U$ となる $r > 0$ が選べることをいい、集合 U が閉集合であるとは U のどんな収束点列の極限点も再び U に属することと定義する。ここで、$B_r(\mathbf{p})$ は中心 $\mathbf{p}$ で半径 r の円板の内部：$B_r(\mathbf{p}) = \{ (x, y) \mid \|(x, y) - (a, b)\| < r \}$ を表す。

2. 次の関数は原点 $(0, 0)$ は連続となるか。

(1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(xy)}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = \mathrm{Arcsin}\, \dfrac{y}{x^2 + y^2}$　　(2) $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{x+y+z}}$

4. 関数 $z = x^3 - xy + 2y^2$ の表す曲面の点 $(1, 1, 2)$ における接平面を求めよ。また、この接平面に関して点 $(1, 5, -2)$ と対称な点の座標を求めよ。

5. 関数 $f(x, y) = \begin{cases} xy\, \mathrm{Arctan} \left| \dfrac{y}{x} \right| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ について $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ を求めよ。

6. $z = e^{xy},\ x = \log \sqrt{u^2 + v^2},\ y = \mathrm{Arctan} \left(\dfrac{v}{u} \right)$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ。

7. C^2-級関数 $f(x, y)$ に対して、$z = f(x, y),\ x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta$ とおくとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

を証明せよ。

8. $f(x, y) = \mathrm{Arccos} \left(\dfrac{x}{y} \right)$ として方向微分 $D_{\frac{\pi}{3}} f(1, 2)$ を求めよ。