微分積分学 AD II，数学序論演習 II　テスト 1 回目　出題日 2001 年 10 月 26 日

1.　次の $f_n(x)$ と I に対し、関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様収束するか調べよ。

(1)　$f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$,　$I = [0, 1]$　　(2)　$f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x - n)^2}$,　$I = \mathbf{R}$

2.　$f_n(x) = n^2 x(1 - x)^n$ $(0 \le x \le 1)$ とおくとき次を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} f_n(x)$　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$

3.　次で関数項級数が I 上で一様収束するか調べよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$,　$I = \mathbf{R}$　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$,　$I = [0, 1]$

4.　$\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ に対し、

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \qquad \text{および} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

を証明せよ。

5.　次のべき級数の収束半径を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$　　(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

6.　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) x^n$ の収束域 (収束する x の範囲) を求めよ。

7.　等比級数の和の式 $\displaystyle\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ を用いて

$$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

を導け。更にこれより、$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを示せ。

8.　極座標表示で $r = \sin 3\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ と表わされる曲線に囲まれた部分の面積を求めよ。

Hint 集　条件などを忘れがちな収束に関する定理を述べておく。

● 定数 γ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ は $\gamma \le 1$ のとき発散し、$\gamma > 1$ のとき収束する。

定理 5.1　区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ は I 上の連続関数となる。

定理 5.3　有界閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束すれば、$f(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能で、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる。

定理 5.5　区間 I 上の C^1 級関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で各点収束し、$\{f_n'(x)\}$ が $g(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ も C^1 級で、$f'(x) = g(x)$ となる。

定理 (Weierstrass の M-判定法)　区間 I 上の関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対し、数列 $\{M_n\}$ で $|f_n(x)| \le M_n$ $(n = 1, 2, \dots,\ x \in I)$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ を満たすものが存在すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上の一様収束する。

定理 (Abel の定理)　べき級数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R $(0 < R < \infty)$ とする。もし、$x = R$ においてこの級数が収束するなら収束は $[0, R]$ でも一様であり、従って $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R, R]$ において連続、即ち、$\displaystyle\lim_{x\to R-0} S(x) = S(R)$ となる。$x = -R$ についても同様のことが成立する。