微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2002 年 2 月 8 日の試験の解答の要点[1]

1 (1) $(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^1 \left(\operatorname{Arctan} t + t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \cdots = 1 - \frac{1}{2}\log 2$

(2) $C = C_1 + C_2$, $C_1 : (x, y) = (t, 0)\ 0 \le t \le 1$, $C_2 : (x, y) = (1, t)\ 0 \le t \le 1$ より
$(\text{与式}) = \displaystyle\int_{C_1} xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy + \int_{C_2} xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = \frac{2}{3}$

(3) $C = C_1 + C_2$, $C_1 : (x, y) = (t, t^2)\ 0 \le t \le 1$, $-C_2 : (x, y) = (t, t)\ 0 \le t \le 1$ より
$(\text{与式}) = \displaystyle\int_{C_1} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy - \int_{C_2} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = \cdots = 0$

(4) $C : (x, y) = (\cos t, \sin t)\ 0 \le 2\pi$ より $(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \{(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t\}\,dt = 2\pi$

(5) $D = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \le 4\}$ とすると、$e^x \sin y$, $e^x \cos y$ は $\mathbf{R}^2$ 上で C^∞-級であるから Green の定理を用いれば
$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(-e^x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) \right\} dx\,dy = \iint_D \{-e^x \sin y - (-e^x \sin y)\}\,dx\,dy = 0$

2 (1) $y = 0, y = -1$ がともに解であることに注意する。与式より、$\frac{1+2y}{y(1+y)}\,dy = -\frac{2x}{1+x^2}\,dx$.
$\int \frac{1+2y}{y(1+y)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1+y} \right) = \log|y(1+y)|$, $-\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\log(1+x^2)$
よって、$\log|y(1+y)| = -\log(1+x^2) + C$, 即ち、$y(1+y) = \frac{\pm e^c}{1+x^2}$. ここで $A = \pm e^c$ とすると、以上のことより $y(1+y) = \frac{A}{1+x^2}$ (A は任意定数) を得る。

(2) 与式より $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$ となるから、$\arctan y = \arctan x + C$ を得る。[2]
よって $C \ne \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき加法定理より、$y = \tan(\arctan x + C) = \frac{x + \tan C}{1 - x\tan C}$, ここで $A = \tan C$ とおき $y = \frac{x+A}{1-Ax}$ (A は任意定数) を得る。
$C = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のときは $\arctan y - \frac{\pi}{4} = \arctan x + \frac{\pi}{4} + n\pi$ と変形してから加法定理を用いることで、$\frac{y-1}{1+y} = \frac{x+1}{1-x}$, 整理して $xy = -1$ を得る。

(3) 与式を変形して $2\frac{y}{x} + \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3 \right\} \frac{dy}{dx} = 0$ より、$u = \frac{y}{x}$ とおくと $2u + (u^2 - 3)\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = 0$, これを整理して $\frac{u^2-3}{u(u^2-1)}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$, ただし $u = 0, u = -1, u = 1$ も解である。$\int \frac{u^2-3}{u(u^2-1)}du = \int \left\{ \frac{3}{u} - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right\} du = \log\left|\frac{u^3}{u^2-1}\right|$ より、$\log\left|\frac{u^3}{u^2-1}\right| = -\log|x| + C$、即ち、$\frac{u^3}{u^2-1} = \frac{A}{x}$ ($A = \pm e^c$) を得る。以上より $u = \frac{y}{x}$ から x, y の式に戻すと、$y^3 = A(y^2 - x^2)$ (A は任意定数), $y = x$, $y = -x$ となる。

(4) $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ を解いて $y = Ax$. よって定数変化法により与えられた方程式の解は $y = A(x)x$ とできる。与式より $A'(x) = \frac{\log x}{x}$ であるから、$A(x) = \int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$ より、$y = x\left\{ \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \right\}$ (C は任意定数) となる。

3 1 月 29 日に配布したハンドアウト p.124 例 6.1.4 を見よ。

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。尚、誤りを含む可能性もある。(これは採点時に修正する。) 配点は **1** が各 5 点、**2** が各 7 点、**3** が 8 点で、満点は 61 点である。

[2] ここで、$\arctan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を値域にするとは限らないことに注意せよ。つまりある整数 m, n があって、$\arctan x \in (-\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$, $\arctan y \in (-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$ と考えている。