微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2002年1月22日の試験の解答の要点

まず、問題**1**(3) の**出題ミス**がありました。(このままでは解けない。) お詫びします。
そのため配点を変更し問題**4**のみ5点, 他が各10点とし満点は75点のままとした。尚、**1**(3) は採点の対象から除外した。

1 (1) $(\text{与式}) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y x^3y^2z\,dz = \cdots = \dfrac{1}{90}$

(2) $D = \{\,(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1-x-y, (x,y) \in D'\,\}$,
$D' = \{\,(x,y) \mid 0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1\,\}$ より

$$(\text{与式}) = \iint_{D'} \left\{ \int_0^{1-x-y} x\,dz \right\} dx\,dy = \iint_{D'} x(1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \{\cdots\}\,dy = \frac{1}{24}$$

(3) D を $\{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le \mathbf{2}x\,\}$ とすべきであった。
このとき、円柱座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ により次の Ω が D に写されるので

$$\Omega = \left\{\,(r,\theta,z) \;\middle|\; -\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2},\ 0 \le r \le 2\cos\theta,\ -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\,\right\}$$

$$(\text{与式}) = \iiint_\Omega \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right| dr\,d\theta\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz = \cdots = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}$$

2 $\cup_{n=1}^\infty D_n \subset D$ について: $(x,y) \in \cup_{n=1}^\infty D_n$ とすると、ある n が存在して $(x,y) \in D_n$ であるが、明らかに $D_n \subset D$ であるから $(x,y) \in D$ となり従う。[1]
$\cup_{n=1}^\infty D_n \supset D$ について: $(x,y) \in D$ とすると、$n_1 \in \mathbf{N}$ を $1/x < n_1$ と、$n_2 \in \mathbf{N}$ を $|y| > n_2$ となるように選び $n = \max\{n_1, n_2\}$ とすれば $(x,y) \in D_n$、従って $(x,y) \in \cup_{n=1}^\infty D_n$ を得る。

3 (1) $D_n = \{(x,y) \mid 0 \le y < x - \frac{1}{n},\ \frac{1}{n} \le x \le 1\}$ とすると $\{D_n\}$ は D の近似増加列となる。

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} (x-y)^{-1/3}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^{x-\frac{1}{n}} (x-y)^{-1/3}\,dy = \cdots = \frac{9}{10}$$

(2) $x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$ に注意する。$D_n = \{(x,y) \mid (x+y)^2+y^2 \le n^2\}$ とすると $\{D_n\}$ は $\mathbf{R}^2$ の近似増加列となる。$x+y = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 即ち $x = r(\cos\theta - \sin\theta), y = r\sin\theta$ とおくと、$\Omega_n = \{\,(r,\theta) \mid 0 \le r \le n,\ 0 \le \theta \le 2\pi\,\}$ は D_n に写されるので、

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-2xy-2y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} e^{-r^2} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr\,d\theta = \cdots = \pi$$

(3) $D_n = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le n^2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ とすると $\{D_n\}$ は D の近似増加列となる。$\mathbf{R}^3$ の極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ に対し、$\Omega_n = \{\,(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le n,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,\}$ は D_n に写されるので、

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \iiint_{\Omega_n} \frac{r^2\sin\theta}{(r^2+1)^2}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2}\,dr = \frac{\pi^2}{8}.$$

最後の "=" は $r = \tan t$ とおき $\displaystyle\int_0^n \frac{r^2}{(r^2+1)^2}\,dr = \int_0^{\mathrm{Arctan}\,n} \sin^2 t\,dt \to \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}\ (n \to \infty)$ を用いた。

4 体積 $V = \displaystyle\int_0^{2a\pi} \pi y^2\,dx$ であるが、$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\ (0 \le t \le 2\pi)$ より

$$V = \int_0^{2\pi} \pi a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt = \cdots = 5\pi^2a^3$$

---

[1] 集合 A, B について、"$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」", "$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$「$x \in A \Longrightarrow x \in B$」"

5 $s = x + y + z + w,\ t = x - y,\ u = x + 3z,\ v = y + z + 2w$ とおく、即ち、

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\dfrac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(s,t,u,v)} = \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ で

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

であり、$\Omega = \left\{ (s,t,u,v) \,\middle|\, |s| \leq 2,\ |t| \leq 1,\ |u| \leq 1,\ |v| \leq 1 \right\}$ が D に写されるから、

$$\iiiint_D dx\,dy\,dz\,dw = \iiiint_\Omega \left| \frac{\partial(x,y,z,w)}{\partial(s,t,u,v)} \right| ds\,dt\,du\,dv = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} ds \int_{-1}^{1} dt \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv = 4.$$