微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2002 年 1 月 8 日の試験の解答の要点[1]

1　本来は**集合** D **を図示**するべきだが省く。解答には図を用いることを強く勧める。

(1)　$(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x}\, dy = \cdots = \frac{256}{15}$

(2)　$(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_0^{\mathrm{Arcsin}\, x} x^2\, dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} x^2\, \mathrm{Arcsin}\, x\, dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \mathrm{Arcsin}\, x\, dx$

$= \displaystyle\frac{\sqrt{2}\pi}{48} - \frac{1}{6}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^2 \cdot 2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =^{(*)} \frac{\sqrt{2}\pi}{48} - \frac{1}{6}\int_{1/2}^1 \frac{1-t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{48} - \frac{2}{9} + \frac{5\sqrt{2}}{36}$

($^{(*)}$ $t = 1 - x^2$ とおく)

(3)　$(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y e^{x/y}\, dx = \cdots = \frac{1}{2}(e-1)$

2　本来は**集合** D **を図示**するべきだが省く。解答には図を用いることを強く勧める。

(1)　$D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\} = \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}$ より

$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_D x e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2}\, dx = \cdots = \frac{1}{4}(e-1)$

(2)　$D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le e,\ 0 \le y \le \log x\} = \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le 1,\ e^y \le x \le e\}$ より

$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_D (1+y)/x\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e (1+y)/x\, dx = \cdots = 2/3$

3　(1)　$\Omega = \{(s,t) | 1 \le s \le \sqrt{3},\ s - st \ge 0,\ st \ge 0\} = \{(s,t) | 1 \le s \le \sqrt{3},\ 0 \le t \le 1\}$ が指定された変換により D に写されるから

$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_\Omega \frac{st}{s^2+1} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| ds\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} ds \int_0^1 \frac{s^2 t}{s^2+1}\, dt = \cdots = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{24}$

(2)　$\Omega = \{(s,t) |\, |s| \le 2,\ |t| \le 1\}$ が D に写されるから $x = \frac{s+t}{2}, y = \frac{s-t}{2}$ に注意すると

$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{2}(s^2+t^2) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| ds\, dt = \int_{-2}^2 ds \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(s^2+t^2)\, dt = \cdots = \frac{10}{3}$

4　(1)　極座標は $\Omega = \{(r,\theta) |\, 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$ を D に写すから

$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{Arctan}\, \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\, r dr\, d\theta = \int_1^2 r\, dr \int_0^{\pi/4} \theta\, d\theta = \cdots = \frac{3\pi^2}{64}$

(2)　$(x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2$ に $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を代入して $r^4 \le r^2 \cos 2\theta$, i.e., $r^2 \le \cos 2\theta$.
$\cos 2\theta \ge 0$ より $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$ を得る。よって、D に写される Ω は
$\Omega = \{(r,\theta) |\, r^2 \le \cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}\}$ となる。以上より図形の y 軸に関する対称性を用いて[2]　$(\text{与式}) = \displaystyle\iint_\Omega r dr\, d\theta = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr = \cdots = 1$

5　$D = \{(x,y) |\, x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$ とすると、xy-平面, yz-平面, zx-平面に関し図形は対称[2]だから

$(\text{体積}) = 8\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2}\, dx\, dy = 8\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\, dy = 8\int_0^2 (4-x^2)\, dx = \frac{128}{3}$

---

[1]**注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。配点は各 7 点で、満点は 70 点である。

[2]対称性を言及しない解答は減点した。