微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2001 年 12 月 11 日の試験の解答の要点[1]

1 [10] $f_x = f_{xx} = f_{xxx}$, $f_y = f_{xy} = f_{xxy}$, $f_{yy} = f_{xyy}$, f_{yyy} を求めて公式に代入して $f(x,y) = y + xy + R_3$、但し、$R_3 = \frac{e^{\theta x}}{6}\left\{x^3 \operatorname{Arctan}\theta y + \frac{3x^2y}{1+\theta^2y^2} - \frac{6\theta xy^3}{(1+\theta^2y^2)^2} + \frac{(6\theta^2y^2-2)y^3}{(1+\theta^2y^2)^3}\right\}$

2 [5] $\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}(x,y) = \frac{2^3(-1)^6\cdot 6!}{(1+x+2y)^7}$ より $\frac{1}{7!}\binom{7}{4}\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}(0,0) = 40$

3 [10] $f_x = f_y = 0$ より $(x,y) = (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (0,0)$. $D = \{f_{xy}\}^2 - f_{xx}f_{yy}$ とすると、$(x,y) = (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ のとき $D < 0, f_{xx} > 0$ より極小値 -8, $(x,y) = (0,0)$ のとき $D = 0$ であるが、$f(t,t) = 2t^4 > 0$ $(t \neq 0)$ かつ $f(t,0) = -t^2(2-t^2) < 0$ $(0 < t < \sqrt{2})$ となり $(0,0)$ の近くで正にも負にもなるので $(x,y) = (0,0)$ は極値ではない。

4 [10] $f(0,0) = 0$ と $f(x,y) > 0$ $((x,y) \neq (0,0))$ より $(x,y) = (0,0)$ で最小値 0 をとる。最大値を調べるためにまず極値を調べる。極値をとりうる点は $f_x = f_y = 0$ より $(x,y) = (0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0)$ であるが、$(0,0)$ では最小値をとり、$f(0,\pm 1) = 2/e$, $f(\pm 1, 0) = 1/e$ である。よって、$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$[2]であることと合わせて、$(x,y) = (0,\pm 1)$ のとき最大値 $2/e$ をとることがわかる。
(注意：極値は極値をとる点の近くをのみ調べればわかるが、最大最小は定義域全体で考察する必要がある[3]。このため、極値と最大値最小値の関係を述べていない解答は大幅に減点した。この問題の興味深さは極大極小を求めなくとも最大最小がわかる点にある。)

5 [10] $f_y = -x + 2y \neq 0$ のとき陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在して、$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{2x-y}{x-2y}$.
また、$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x,\varphi(x))\} = f_{xx} + 2f_{xy}\varphi' + f_{yy}\varphi'' + f_y\varphi''$ より $\varphi''(x) = \frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}$ を得る。
極値については $f(x,y) = f_x(x,y) = 0$ より $(x,y) = (1,2), (-1,-2)$ であるが、$\varphi''(1) < 0$, $\varphi''(-1) > 0$ より、$x = 1$ のとき極大値 2, $x = -1$ のとき極小値 -2 をとる。

6 [10] $\psi_x = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = -\frac{2x\sqrt{1-(xyz)^2}+yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$, $\psi_y = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = -\frac{2y\sqrt{1-(xyz)^2}+xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}+xy}$

7 [10] $h(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4, f(x,y) = x + y$ とおき Lagrange の未定乗数法を用いる。[4]
$f_x = \lambda h_x, f_y = \lambda h_y$ を解いて $(x,y,\lambda) = (\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{8}), (-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{8})$.
$\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$ は楕円の円周を表す (有界閉集合で境界がない) から $f(x,y)$ は極値において最大値・最小値をとりそれがそれぞれ極大値・極小値となる。よって極値における f の値を調べると $f(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$, $f(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$ より、$(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ のとき極大値 $\sqrt{5}$, $(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ のとき極小値 $-\sqrt{5}$ をとる。

8 [5] $r^2\sin\theta$ (単に偏導関数を求め行列式を計算すればよい。)

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。より詳しくは直接質問に来ること。今回掲示した解答は問題 **1**, **2**, **6** と **7** に誤りがあった。満点は 70 点に変更した。

[2] $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0 \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists M \text{ such that } \|(x,y)\| \geq M \Longrightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$
言うまでもないが、$\|(x,y)\| \to \infty$ と $(x,y) \to \infty$(これは意味を持たない) や $(x,y) \to (\infty,\infty)$ とは全く異なる。

[3] この事実は高校で学習した一変数関数の最大最小が極値からだけではわからないことからも明らかであろう。脚注 2 は定義域の境界での関数の様子を調べていることになる。この問題の「極値において最大値をとる」ことの証明は解析学序論の簡単な問題として保留にしておこう。ちなみに、「多変数関数が停留点を一つ持ちそこで極小 (極大) であれば最小 (最大) となる」の証明は難しい。(簡単な方法があれば教えてください。)

[4] 他の方法で解いても構わない。例えば、$h(x,y) = 0$ を満たす (x,y) が $x = 2\cos\theta, y = \sin\theta$ と表されることを用い、$g(\theta) = f(2\cos\theta, \sin\theta) = \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ $(\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}})$ の極大・極小について考えてもよい。