**微分積分学 AD II, 数学序論演習 II** 2001 年 11 月 20 日の試験の解答の要点[1]

**1** [10] $U$ が開集合であること。$(a,b)\in U$ とする。$r>0$ を $0<r<\min\{a,1-a,b,1-b\}$ と選べば、$(x,y)\in B_r((a,b))$ のとき $|x-a|,|y-b|\le\|(x,y)-(a,b)\|<r$ より $0<a-r<x<a+r<1, 0<b-r<y<b+r<1$、即ち、$(x,y)\in U$ を得る。従って、$B_r((a,b))\subset U$ となり、$U$ は開集合である。[2]

$U$ が閉集合ではないこと。$\mathbf{p}_n=(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1})\in U$ $(n=1,2,\dots)$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{p}_n=(0,0)$ であるが、$(0,0)\notin U$ なので $U$ は閉集合ではない。

**2** [各 5] (1) $|\sin xy|\le|xy|\le\frac{x^2+y^2}{2}$ より $|f(x,y)|\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0$ $((x,y)\to(0,0))$ であるから連続。

(2) $f(t,mt)=\frac{\sin^2 mt^2}{t^4(1+m^4)(1+\cos mt^2)}=\left(\frac{\sin mt^2}{mt^2}\right)^2\frac{m^2}{(1+m^4)(1+\cos mt^2)}\to\frac{m^2}{2(1+m^4)}$ $(t\to0)$ より連続ではない。（もし、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ が存在すれば、$(x,y)\to(0,0)$ の近づき方によらず一定である。）

**3** [4/6] (1) $f_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)^2-y^2}}$, $f_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)^2-y^2}}$

(2) $f_x=x^{\frac{1}{x+y+z}}\left\{\frac{1}{x(x+y+z)}-\frac{\log x}{(x+y+z)^2}\right\}$, $f_y=f_z=-\frac{x^{\frac{1}{x+y+z}}\log x}{(x+y+z)^2}$

**4** [10] 接平面：$z=2x+3y-3$ (公式に代入せよ)

対称な点：求める点は接平面に垂直で点 $(1,5,-2)$ を通る直線上にあるので $(2t+1,3t+5,-t-2)$ とできる。これと $(1,5,-2)$ の中点 $(t+1,\frac{3}{2}t+5,-\frac{1}{2}t-2)$ が接平面上にあるので代入して解くと $t=-\frac{16}{7}$ を得る。よって、求める点は $(-\frac{25}{7},-\frac{13}{7},\frac{2}{7})$ である。

**5** [10] $f_x(0,y)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim\limits_{h\to0}y\,\mathrm{Arctan}\left|\frac{y}{h}\right|=\frac{\pi}{2}y$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{Arctan}\,x=\frac{\pi}{2}$ に注意$)$ より
$f_{xy}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(0,0)=\frac{\pi}{2}$,
$f_y(x,0)=\lim\limits_{k\to0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=0$ より $f_{yx}(0,0)=0$

**6** [10] $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\cdots=\frac{e^{xy}}{u^2+v^2}(uy-vx)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\cdots=\frac{e^{xy}}{u^2+v^2}(vy+ux)$

**7** [10] 略 (11 月 13 日の授業中に示した。)

**8** [5] $f_x=-\frac{1}{\sqrt{1-(x/y)^2}}\cdot\frac{1}{y}$, $f_y=-\frac{1}{\sqrt{1-(x/y)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$ より $D_{\pi/3}f(1,2)=f_x(1,2)\cos\frac{\pi}{3}+f_y(1,2)\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4}$

---

[1] **注意** この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。（たいていは 0 点である。）より詳しくは直接質問に来ること。また、計算間違いを含む可能性もある。(実際、今回掲示した解答は問題 **2**(2) と **4** に誤りがあった。) [ ] 内は配点で、満点は 75 点である。

[2] 集合 $A,B$ に対し、「$A\subset B\overset{\mathrm{def}}{\iff}\forall p\in A$ に対し $p\in B$」である。