微分積分学 AD II，数学序論演習 II　　2001 年 10 月 26 日の試験の解答の要点[1]

1 [各 5 点] (1) $\lim f_n(x) = 0$ $(0 \le x \le 1)$ に注意する。[2] $f_n'(x) = 0$ を考察することで $f_n(x)$ は $x = \frac{2}{n}$ で最大値をとることがわかるから $\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x) - 0| = f_n(\frac{2}{n}) = \frac{4e^{-2}}{n} \to 0$ となり 0 に一様収束する。

(2) $\lim f_n(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R})$ に注意する。(1) と同様の考察により $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - 0| = f_n(n) = 1$ となり一様収束しないことがわかる。

2 [3/4/3] (1) 0 ($x = 0$ と $0 < x \le 1$ で場合分けせよ)

(2) $\sup_{0\le x\le 1} f_n(x) \ge f(\frac{1}{n}) = n(1-\frac{1}{n})^n \to \infty$ より ∞ $((1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1}$ に注意)

(3) $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n^2(1-y)y^n dy = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \cdots \to 1$ $(n \to \infty)$

3 [各 5] (1) $|\frac{1}{n^2+x^2}| \le \frac{1}{n^2}$ と $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ より Weierstrass の M-判定法により一様収束する。

(2) 等比級数の計算により $\sum xe^{-nx} = \frac{x}{1-e^{-x}}$ $(x \ne 0)$, $= 0$ $(x = 0)$ となる。ここで、$\lim_{x\to+0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$ より $\sum xe^{-nx}$ は $x = 0$ で連続ではない。従って、定理 5.1 の対偶をとることで一様収束しないことがわかる。

4 [10] $|\frac{\sin nx}{n^3}| \le \frac{1}{n^3}$ で $\sum \frac{1}{n^3} < \infty$ より Weierstrass の M-判定法により $f(x)$ の関数項級数は一様収束する。よって積分の結果は定理 5.3 と $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n^3}dx = \frac{2}{n^4}$ (n は奇数) , $= 0$ (n は偶数) より従う。微分の結果は $f(x)$ の関数項級数は一様収束、よって各点収束することと、$|\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'| \le \frac{1}{n^2}$ かつ $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ より Weierstrass の M-判定法により微分に関する関数項級数 $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ は一様収束するから定理 5.5 により示される。

5 [各 5] (1) $\lim |a_n|^{1/n} = \frac{1}{e}$ より収束半径 $= e$ (2) $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{4}$ より収束半径 $= 4$

(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ とすると $\lim a_n = \infty$ より $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{a_n(n+1)}\right) = 1$ となり収束半径 $= 1$

6 [5] $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ とおくと $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ より収束半径 $= 1$、即ち、$-1 < x < 1$ で絶対収束し、$|x| > 1$ のとき発散する。また、$x = -1$ のとき $\{a_n\}$ は非負単調減少で $\lim a_n = 0$ より $\sum a_n(-1)^n$ は交代級数であるから収束する。一方 $x = 1$ のとき $\sum a_n 1^n \ge \sum \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \infty$ より発散する。以上よりべき級数の収束域は $-1 \le x < 1$ である。

7 [10] $0 < a < 1$ とすると Weierstrass の M-判定法により整級数 $\sum(-1)^n x^{2n}$ は $[-a, a]$ 上で一様収束することがわかる。従って $-1 < x < 1$ に対し、

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{7}$$

となる。右辺の級数は $|x| < 1$ のとき収束、$|x| > 1$ のとき発散するから収束半径は 1 である。更に、$x = 1, -1$ のときも $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は交代級数なので収束するから Abel の定理により $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ は $-1 \le x \le 1$ で連続。一方、$\operatorname{Arctan} x$ は $\mathbf{R}$ 上で連続。従って (7) が $-1 < x < 1$ で成立するから $x \to 1-0, x \to -1+0$ と近似することにより $\operatorname{Arctan} x = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ は $-1 \le x \le 1$ で成立することがわかる。ここで、特に $x = 1$ とすることで $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$ より $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ が従う。

8 [5] $r \ge 0$ より $r = \sin 3\theta$ の定義域は $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi, \frac{4\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}$ となる。$\pm 2\pi/3$ 回転に関し図形は対称だから、面積 $S = 3 \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta d\theta = \pi/4$.

---

[1] **注意**　この「試験の解答の要点」は解答の要点である。そのままの答えでは完全な解答とは言えない。(たいていは 0 点である。) より詳しくは直接質問に来ること。[ ] 内は配点である。問題 **6** の配点を変更し満点は 75 点である。

[2] $\lim_{n\to\infty}$ を単に lim と記す。無限和 $\sum$ の和に関する範囲が自明にわかるときは $\sum_{n=0}^{\infty}$ や $\sum_{n=1}^{\infty}$ を単に $\sum$ と記す。以下も同様。