微分積分学 AD II，数学序論演習 II　線積分とグリーンの定理の追加問題　　2002 年 1 月 29 日

1.　次の線積分を求めよ。[1]

(1)　$\displaystyle\int_C y\,dx + x^2\,dy$，$C$ は $(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ次の曲線。

(a)　$(x,y)=(t,t)$　$(0\le t\le 1)$　　(b)　$(x,y)=(t,t^2)$　$(0\le t\le 1)$

(c)　$(x,y)=(t^2,t)$　$(0\le t\le 1)$　　(d)　折れ線 $(0,0)\longrightarrow(1,0)\longrightarrow(1,1)$

(2)　$\displaystyle\int_C xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$，$C$ は $(0,0)$ と $(1,2)$ を結ぶ次の曲線。

(a)　$y=2x^2$　$(0\le x\le 1)$　　(b)　$y=2x$　$(0\le x\le 1)$

(3)　$\displaystyle\int_C x^2\,dx + y^2\,dy$，$C$ は $x^2+y^2=1$ を $(1,0)$ から $(-1,0)$ へ　(a)　$y\ge 0$，(b)　$y\le 0$　で結ぶ次の曲線。

2.　次の線積分を求めよ。ただし、C には正の向きが与えられているとする。[2]

(1)　$\displaystyle\int_C x^2y\,dx + y^3\,dy$，$C$ は $y=x$ と $y=x^2$ の囲む部分の境界

(2)　$\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$，$C$ は $y=x$ と $y=x^2$ の囲む部分の境界

(3)　$\displaystyle\int_C (x^2-y)\,dx + (x-y^2)\,dy$，$C$ は 3 直線 $y=0$，$x=1, y=x$ の囲む三角形の周

(4)　$\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$，$C$ は　(a)　$x^2+y^2=1$，(b)　$(x-2)^2+y^2=1$

(5)　$\displaystyle\int_C e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy$，$C$ は $x^2+y^2=a^2$　$(a>0)$

定理　D を xy-平面上の単連結領域とする[3]。D 上の C^1 級関数 $P(x,y), Q(x,y)$ が $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ を満たすならば、D 上の C^2-級関数 $f(x,y)$ で

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=Q$$

を満たすものが存在する。

証明　共通の始点、終点を持つ D 内の曲線 C_1, C_2 に対して、閉曲線 $C_1\cup(-C_2)$ の内部を Ω とすると、D は単連結であるから、Ω は D に含まれる。

よって、Green の定理より

$$0=\iint_\Omega\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dx\,dy=\int_{C_1\cup(-C_2)}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{C_1}(P\,dx+Q\,dy)-\int_{C_2}(P\,dx+Q\,dy)$$

ゆえに、$\int_{C_1}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{C_2}(P\,dx+Q\,dy)$. そこで、1 点 $(x_0,y_0)\in D$ をとり、各点 $(x,y)\in D$ に対して

$$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\{P(\xi,\eta)\,d\xi+Q(\xi,\eta)\,d\eta\}$$

とおく。右辺の線積分は点 (x_0,y_0) と点 (x,y) を結ぶ曲線の選び方によらないから、$f(x,y)$ は一意的に定義される。十分小さい h に対し[4]、

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{(x,y)}^{(x+h,y)}(P\,d\xi+Q\,d\eta)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}P(\xi,y)\,d\xi.$$

$h\to 0$ として $\frac{\partial f}{\partial x}=P$ を得る。$\frac{\partial f}{\partial y}=Q$ につても同様にわかる。□

3.　次の線積分は積分路によらないことを示し、その値を求めよ。[5]

(1)　$\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,1)} 2xy\,dx+(x^2-y)\,dy$　　(2)　$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^2\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy$

---

[1]解答：(1) (a) 5/6, (b) 5/6, (c) 13/15, (d) 1　(2) (a) $-7/6$, (b) $-4/3$　(3) (a) $-1/3$, (b) $-1/3$

[2]解答：(1) $-1/20$　(2) 0　(3) 1　(4) (a) 2π, (b) 0　(5) 0

[3]平面領域 D において、D 内に描いた任意の単純閉曲線の内部が D に含まれるとき、D は**単連結**であるという。

[4]$|h|$ が十分 0 に近いの意味。

[5]解答：(1) $D=\mathbf{R}^2$ で $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$, $-1/2$　(2) $D=\mathbf{R}^2$ で $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-e^x\sin y$, -1