微分積分学 AD II，数学序論演習 II　広義積分の追加問題　　2001 年 12 月 21 日

1. 次の広義積分の値を求めよ。[1]

(1) $\displaystyle\iint_D \left(1-x^2-y^2\right)^{-a/2}\,dx\,dy \quad (0<a<2) \qquad D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2<1\,\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D |x-y|^{-a}\,dx\,dy \quad (0<a<1) \qquad D=\{\,(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,0\le y\le 1,\,y\ne x\,\}$

(3) $\displaystyle\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-a/2}\,dx\,dy\,dz \quad (0<a<3) \qquad D=\left\{\,(x,y,z)\;\middle|\;0<x^2+y^2+z^2\le 1\,\right\}$

(4) $\displaystyle\iiint_D \left(1-x^2-y^2-z^2\right)^{-a/2}\,dx\,dy\,dz \quad (0<a<2) \qquad D=\left\{\,(x,y,z)\;\middle|\;x^2+y^2+z^2<1\,\right\}$

(5) $\displaystyle\iint_D e^{-px^2-qy^2}\,dx\,dy \qquad D=\{\,(x,y)\mid x\ge 0,\,y\ge 0\,\} \quad (p>0,\,q>0)$

2. 次の広義積分の値を求めよ $(a>0)$。[2]

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^4} \qquad D=\{\,(x,y)\mid x\ge 1,\,y\ge 1\,\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dx\,dy \qquad D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;0\le y<a,\,x^2+y^2\le a^2\,\right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad D=\{\,(x,y)\mid 0<y\le x\le 1\,\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)(1+y^2)}\,dx\,dy \qquad D=\{\,(x,y)\mid 0<x\le y\,\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \log\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy \qquad D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;0<x^2+y^2\le 1\,\right\}$

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+x^2+y^2\right)^2}} \qquad D=\{\,(x,y)\mid x\ge 0,\,y\ge 0\,\}$

(7) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right)^2} \qquad D=\{\,(x,y,z)\mid x\ge 0,\,y\ge 0,z\ge 0\,\}$

(8) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad D=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2<a^2\,\right\}$

(9) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} \qquad D=\left\{\,(x,y,z)\;\middle|\;x^2+y^2+z^2<a^2\,\right\}$

3. 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$, $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$ をそれぞれ求めよ。また、広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, $(D=\{\,(x,y)\mid 0\le x,y\le 1,\,(x,y)\ne(0,0)\,\})$ は存在しないことを示せ。

4. $\displaystyle Q=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&4&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ とし、$\displaystyle\varphi_Q(x,y,z)=(x,y,z)Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x^2+4y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx$ とする。以下の問に答えよ。[3]

(1) Q を対角化せよ、即ち、直交行列 P と対角行列 D で $Q=PD\,{}^tP$ となるものを求めよ。ここで、${}^tP$ は P の転置行列を表す。(P が直交行列であるとは $P\,{}^tP={}^tPP=E$(単位行列) となるときにいう。)

(2) $f(x,y,z)=(2\pi)^{-3/2}(\det Q)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\varphi_Q(x,y,z)}$ とおくとき $\displaystyle\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=1$ を示せ。

(3) $\displaystyle\iiint_{\mathbf{R}^3} xyf(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ を求め、これが Q の逆行列 Q^{-1} の $(1,2)$-成分と一致することを示せ。

---

[1] 解答：(1) $2\pi/(2-a)$　(2) $2/(1-a)(2-a)$　(3) $4\pi/(3-a)$　(4) $4\pi/(2-a)$　(5) $\pi/4\sqrt{pq}$

[2] 解答：(1) $1/24$　(2) $a^4/6$　(3) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$　(4) $\pi^2/8$　(5) $-\pi$　(6) $\pi/2a$　(7) $\pi^2/8a$　(8) $2\pi a$　(9) πa^2

[3] いうまでもないが (2), (3) の結果は偶然ではない。一般の正定値対称行列 Q に対し (2), (3) を示せ。