

1. 次の広義積分の値を求めよ。¹

- (1) $\iint_D (1-x^2-y^2)^{-a/2} dx dy \quad (0 < a < 2) \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
- (2) $\iint_D |x-y|^{-a} dx dy \quad (0 < a < 1) \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \neq x\}$
- (3) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-a/2} dx dy dz \quad (0 < a < 3) \quad D = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- (4) $\iiint_D (1-x^2-y^2-z^2)^{-a/2} dx dy dz \quad (0 < a < 2) \quad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
- (5) $\iint_D e^{-px^2-ky^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \quad (p > 0, q > 0)$

2. 次の広義積分の値を求めよ ($a > 0$)。²

- (1) $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^4} \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 1, y \geq 1\}$
- (2) $\iint_D \frac{x^2 y}{\sqrt{a^2 - y^2}} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y < a, x^2 + y^2 \leq a^2\}$
- (3) $\iint_D \frac{x+y}{x^2 + y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid 0 < y \leq x \leq 1\}$
- (4) $\iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2)(1 + y^2)} dx dy \quad D = \{(x, y) \mid 0 < x \leq y\}$
- (5) $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy \quad D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (6) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + x^2 + y^2)^2}} \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$
- (7) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2} \quad D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
- (8) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$
- (9) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \quad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$

3. 累次積分 $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy, \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ をそれぞれ求めよ。また、広義積分 $\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, ($D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$) は存在しないことを示せ。

4. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし、 $\varphi_Q(x, y, z) = (x, y, z)Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ とする。

以下の間に答えよ。³

- (1) Q を対角化せよ、即ち、直交行列 P と対角行列 D で $Q = PD^tP$ となるものを求めよ。ここで、 tP は P の転置行列を表す。 $(P$ が直交行列であるとは $P^tP = {}^tPP = E$ (単位行列) となる時にいう。)
- (2) $f(x, y, z) = (2\pi)^{-3/2}(\det Q)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\varphi_Q(x, y, z)}$ とおくと $\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = 1$ を示せ。
- (3) $\iiint_{\mathbf{R}^3} xyf(x, y, z) dx dy dz$ を求め、これが Q の逆行列 Q^{-1} の (1, 2)-成分と一致することを示せ。

¹解答: (1) $2\pi/(2-a)$ (2) $2/(1-a)(2-a)$ (3) $4\pi/(3-a)$ (4) $4\pi/(2-a)$ (5) $\pi/4\sqrt{pq}$

²解答: (1) $1/24$ (2) $a^4/6$ (3) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$ (4) $\pi^2/8$ (5) $-\pi$ (6) $\pi/2a$ (7) $\pi^2/8a$ (8) $2\pi a$ (9) πa^2

³いうまでもないが (2), (3) の結果は偶然ではない。一般の正定値対称行列 Q に対し (2), (3) を示せ。