微分積分学 AD II, 数学序論演習 II　　2001 年 10 月 5 日

授業計画
教科書（三宅・市原著 理系の基礎数学 微分積分学）におおよそ沿って、

- 5-7 積分の応用　(付録 5. 関数列の極限 を含む)
- 第 4 章　偏微分法　(付録 1,2 の多変数の場合を含む)
- 第 6 章　多変数積分法　(付録 6 を含む)

について講義をする。
教科書および問題集（水本著 微分積分学問題集）のみでは不足と思われる場合はハンドアウトを配布し補足を行う[1]。また必要に応じて今年度の数学序論の教科書 (荷見・堀内著 現代解析の基礎) も参照する[2]。

試験の予定
10 月 16 日（1 回目）、10 月 26 日（2 回目）、11 月 20 日（3 回目）、12 月 11 日（4 回目）
それ以降については後日連絡をする。
試験の範囲は遅くとも一週間前の授業には明らかにする。

質問の受け付け（オフィスアワー）
授業終了後および月曜日・水曜日の午前 9 〜 10 時に受けつける。[3]
上記の時間は必ず教室または研究室にいる（休暇や出張中の場合を除く）の意味で、上記以外の時間に質問に研究室を訪ねても構わない（必ずしも研究室にいるとは限らない)。

関数列の収束に関する補足 (10 月 5 日）[4]

定義[5]　$f_n(x)$, $f(x)$ を区間 I 上に定義された関数とする。

(1)　関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で各点収束する[6]とは、すべての $x \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるときに、即ち、任意の $x \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(x, \varepsilon)$ が存在して

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるときにいう[7]。

(2)　関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するとは、$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ となるときに、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(\varepsilon)$ が存在して

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in I)$$

となるときにいう[8]。このとき、$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ とも記す。

命題　関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束すれば各点収束する。

例　$f_n(x) = x^n$ は $x \in [0,1]$ に対し $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ に各点収束するが、$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[0,1]$ 上で一様収束しない。

定理 5.1　区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ は I 上の連続関数となる。

定理 5.2　区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で一様収束するための必要十分条件は、$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$ となる、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N = N(\varepsilon)$ が存在して

$$n, m \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (x \in I)$$

となることである。[9]

---

[1] ハンドアウトは配布する当日以外は授業の教室に持ってこないので必要な者は杉浦の研究室 514-b 室に取りに来ること。尚、配布より一月以上過ぎたハンドアウトは処分するので注意すること。
[2] 昨年の数学序論の教科書でもあった。
[3] 質問へは研究室に来て下さい。月水については、質問は 403 室でお答えするので、もし研究室にいない場合そこを探してください。
[4] 証明はここには書かないが授業中に述べる。いうまでもなく、証明を理解することは重要である。
[5] 教科書 p.234–。荷見・堀内著 現代解析の基礎 (今年去年の数学序論 I, II の教科書）p.208– も参照のこと。
[6] 単に**収束**するともいう
[7] $N = N(x, \varepsilon)$ は x と ε に依存するの意味
[8] (1) と較べて N が x に依存しないことに注意
[9] この定理は例えば微分方程式の解の存在証明に応用される。

定理 5.3 有界閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能な関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上で一様収束すれば、$f(x)$ も $[a,b]$ 上で積分可能で、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる。[10]

定理 5.5 区間 I 上の C^1 級関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上で各点収束し、$\{f_n'(x)\}$ が $g(x)$ に I 上で一様収束すれば、$f(x)$ も C^1 級で、$f'(x)=g(x)$ となる。

問題 1[11] 次で与えられる $f_n(x)$ と I に対し、$\{f_n(x)\}$ の一様収束性を調べよ。

(1) $f_n(x)=nx^n,\ I=[0,a]\ \ (0<a<1)$ (2) $f_n(x)=x^{2n}/(1+x^{2n})\ \ I=[0,1]$

(3) $f_n(x)=n^3xe^{-nx^2},\ I=\mathbf{R}$ (4) $f_n(x)=nx(1-x)^n\ \ I=[0,1]$

(5) $f_n(x)=nx(1+n^2x^2)^{-1},\ I=\mathbf{R}$ (6) $f_n(x)=n\sin(x/n)\ \ I=[0,\pi]$

定義 (関数項級数) $f_n(x)$ を区間 I 上の関数、部分和を $F_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^n f_k(x)$ とおく。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が I 上で各点収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{F_n(x)\}$ が I 上で各点収束

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が I 上で一様収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\{F_n(x)\}$ が I 上で一様収束

● 定理 5.1–5.5 において関数列 $f_n(x)$ を関数項級数の部分和 $F_n(x)$ と見なすことで次の定理 5.1'–5.5' を得る。

定理 5.1' $f_n(x)$ が区間 I で連続であれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ も $f(x)$ は I 上の連続関数となる。

定理 5.2' $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty}\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^m f_k(x)\right|=0$ であれば、関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ も $f(x)$ は I 上の一様収束する。

系 (Weierstrass の M-判定法) 区間 I 上の関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ に対し、数列 $\{M_n\}$ で

$$|f_n(x)|\le M_n\quad (n=1,2,\ldots,\ x\in I)\qquad \text{かつ}\qquad \sum_{n=1}^\infty M_n<\infty$$

を満たすものが存在すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ は I 上の一様収束する。

定理 5.3' $f_n(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上積分可能で $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が I 上の一様収束すれば、

$$\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx.$$

定理 5.5' 区間 I 上の C^1 級関数 $f_n(x)$ に対し、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が I 上の各点収束し $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ が I 上の一様収束すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ は I 上の C^1 級で、$\displaystyle\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ となる。

---

[10] この事実を（より一般的な関数の積分を可能にするとともに）拡張したのが**ルベーグ積分論**である。特に確率論や微分方程式論はこの恩恵を受け飛躍的に発展した。

[11] 現代解析の基礎（荷見・堀内著）pp.214–217 **演習問題 17** 問 1–3, 10–17 も関連問題である。次回試験の範囲に含めるので解いておくこと。また、ハンドアウトで出題する**問題**の解答は作成しない。自分の解答に自信のないときなどは質問に来ること。

例 数列 $\{a_n\}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すれば、$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ は $\mathbf{R}$ 上一様収束するので連続である。このとき、$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ となる。また、$\{a_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|<\infty$ を満たせば、上記の $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^1 級で $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\cos nx$ となる。[12]

問題 2[13] 次で関数項級数が I 上で一様収束するか調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},\ I=\mathbf{R}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}xe^{-nx},\ I=[0,1]$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx},\ I=(0,\infty)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),\ I=\mathbf{R}\ \ (|a|<1,\,b\in\mathbf{R})$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^px^2},\ I=\mathbf{R}\ \ (p>2)$

問題 3 次を示せ。[14]

(1) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ に対し、$\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ および $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

(2) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$ に対し、$f'(x)=-2x\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+nx^2)^2}$.

級数の収束に関する補足[15]

定義 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するとは $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ なるときにいう。[16]

定理 (比較判定法) 数列 $\{a_n\}$ に対し、$M>0$ と数列 $\{b_n\}$ が存在して

$$|a_n|\le Mb_n\quad(n=1,2,\dots)\qquad\text{かつ}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$$

ならば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する。

定理 5.6 (Cauchy の判定法) 数列 $\{a_n\}$ に対し、ある $M>0,\ 0\le r<1$ と番号 N が存在して

$$n\ge N\qquad\Longrightarrow\qquad|a_n|\le Mr^n$$

ならば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する。特に $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ であれば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する。

定理 5.7 (d'Alembert の判定法) 数列 $\{a_n\}$ に対し、ある $0\le r<1$ と番号 N が存在して

$$n\ge N\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le r$$

ならば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する。特に $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$ であれば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する。

---

[12] これは Fourier 級数論の最も簡単な場合である。

[13] 現代解析の基礎（荷見・堀内著）p.215 **演習問題 17** 問 5 も関連問題である。次回試験の範囲に含めるので解いておくこと。

[14] Hint: 積分に関しては定理 5.3' を、微分に関しては定理 5.5' を適用せよ。さらにこのためには Weierstrass の M-判定法を用いよ。

[15] 前期に少し触れたが（整級数の学習において）不足する部分を補足する。荷見・堀内著 現代解析の基礎 pp.194–200 も参照のこと。また、教科書**演習問題 5-1** および問題集 pp.126–130 (§§60–62) を復習しておくこと。

[16] 条件収束についても各自復習のこと。特に交代級数の収束なども各自復習のせよ。

べき級数の収束[17] $x_0 \in \mathbf{R}$ を固定したとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ の形の表現をべき級数という。

定理 7.2 (べき級数の収束域)[18] べき級数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0 (\neq 0)$ で収束すれば、$0 < r < |x_0|$ に対し、このべき級数は $|x| \leq r$ 上で絶対一様収束する[19]。特に、$S(x)$ は $|x| < |x_0|$ なる x で連続となる。

注意 べき級数が $x = x_0$ のとき収束したからといって、$x = -x_0$ で収束するとは限らない。例えば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ は $x = -1$ のとき収束するが、$x = 1$ のときは収束しない。

定義 (収束半径) $R = \sup\{r > 0\,;\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ は $|x| \leq r$ 上絶対一様収束する $\}$ と定め、この R を級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ の収束半径という。[20]

● $|x-c| < R$ なる x に対し、級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ は絶対収束、

$|x-c| > R$ なる x に対し、級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ は発散する。

特に、$R = \infty$ のときは $\forall x \in \mathbf{R}$ で絶対収束、$R = 0$ のときは $\forall x \neq c$ で発散する。

定理 7.4 (べき級数の収束半径) (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ または (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ であれば、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ の収束半径は $R = 1/\rho$ である。[21]

定理 7.3 (べき級数の項別積分、項別微分) べき級数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ の収束半径が $R\ (0 < R \leq \infty)$ であれば、$c - R < a < b < c + R$ に対し項別積分できる、即ち、

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n\,dx.$$

また、$|x-c| < R$ なる x に関し項別微分ができる、即ち、

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

定理 (Abel の定理) べき級数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が $R\ (0 < R < \infty)$ とする。もし、$x = R$ において この級数が収束するなら収束は $[0, R]$ でも一様であり、従って $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R, R]$ において連続、即ち、$\displaystyle\lim_{x\to R-0} S(x) = S(R)$ となる。$x = -R$ についても同様のことが成立する。

関数のべき級数展開 Taylor の定理を用いて関数をべき級数展開できるときがある。[22]

問題 $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ を用いて $\operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\ (-1 \leq x \leq 1)$ を示せ。更にこれより、$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ となることを示せ。

---

[17] 教科書 p.166–, 問題集 pp.130–133 も試験範囲に含めるので勉強しておくこと。荷見・堀内著 現代解析の基礎 p.211 も参照のこと。

[18] ここから定理の番号は教科書に従う

[19] 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が I 上で絶対一様収束するとは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ が I 上で一様収束するときにいう。

[20] 収束半径とは x を複素数とした複素関数としてのべき級数が $|z-c| < R$ (複素平面上で中心 c 半径 R の円の内部を表わす) 上で絶対収束することによる。詳しくは複素関数論 (3 年次解析学 I, II) で学ぶ。

[21] ρ と R の関係において $1/\infty = 0, 1/0 = \infty$ と解釈をするものとする。

[22] $x = a$ のまわりで C^∞-級の関数であっても、$x = a$ のまわりでべき級数展開できるとは限らない。詳しくは授業で説明する。