

1. 次の関数の不定積分を求めよ。

$$\begin{array}{lll}
 (1) \frac{1}{x^3 + 1} & (2) \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^2} & (3) \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} \\
 (4) x + \sqrt{x^2 + 1} & (5) \frac{1}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}} & (6) \sqrt{x + \sqrt{2+x^2}} \\
 (7) \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} & (8) \frac{1}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} & (9) \frac{\sin x}{1 + \sin x}
 \end{array}$$

2. $I_m = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^m}$ に関し漸化式

$$I_m = \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)} \frac{x}{(x^2 + 1)^{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots,$$

が成立することを示せ。更に、これより $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$ を求めよ。

3. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int_0^1 \frac{1 - e^x}{x^{4/3}} dx & (2) \int_1^\infty \frac{\log x}{x^{3/2}} dx \\
 (3) \int_0^\pi \frac{\sin x}{x(\pi - x)} dx & (4) \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}} dx
 \end{array}$$

ただし、定数 α に対する広義積分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ ($a, b \in \mathbf{R}$) や $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ の収束・発散の結果は証明なしで用いても構わない。

連絡 8月6日(月)午前10:30から答案用紙を返却するので、返却を希望する者は理学部複合棟412室(いつもの教室)に受け取りに来ること。