微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 7 回目　出題日　2001 年 7 月 17 日

1.　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Arctan}\,x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan x\right)\,dx$

ヒント　(3) は $t=\tan x$, (6) は $t=\frac{\pi}{4}-x$ と置換せよ。

2.　次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$

3.　$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、$f(x)\geq 0$ $(a\leq x\leq b)$ かつ $f(x_0)>0$ なる $x_0\in[a,b]$ が存在すれば、

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

であることを示せ。

4.　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(1\cdot\sqrt{n^2-1^2}+2\cdot\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+n\cdot\sqrt{n^2-n^2}\right)$

5.　関数 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}), \\ 0 & (x \text{ は無理数}), \end{cases}$ は $[0,1]$ で定積分可能ではないことを示せ。

ヒント　Darboux の不足和 $s(f,\Delta)$, Darboux の過剰和 $S(f,\Delta)$（または上積分・下積分）を計算してみよ。

6.　$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし $f(x)>0$ $(x\in[a,b])$ とする。このとき、

$$\log\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx$$

を証明せよ。(この式を Jensen の不等式という。)

ヒント　$\varphi(t)=-\log t$ が凸関数であること、即ち、$\varphi(t)\geq\varphi'(c)(t-c)+\varphi(c)$ を満たすことを用いよ。