微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 6 回目　出題日 2001 年 7 月 3 日

1.　数列 $\{s_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \beta$ かつ $\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = 0$ を満たせば、$\{s_n\}$ は収束列でその極限は $\alpha(=\beta)$ であることを示せ。

2.　Taylor の定理を用いて次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}\, x - x}{x^3}$

3.　Taylor の定理を用いて、次の不等式を示せ。

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad (x > 0)$$

4.　Taylor の定理を用いて、$f(x)$ が C^2-級のとき、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

を証明せよ。

5.　等比級数の和の公式 $\frac{1-(-x)^n}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1}$ $(x \neq -1)$ から

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-y)^n}{1+y} dy \qquad (-1 < x \leq 1)$$

を導け。さらに、この式を用いて関数 $\log(1+x)$ のマクローリン展開式

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad (-1 < x \leq 1)$$

を証明せよ。（注意：$x = 1$ ととれば $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が従う。）

6.　関数 $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ の極値、変曲点などを調べグラフをかけ。

7. 次の級数の収束・発散を調べよ。ただし、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ (γ は定数) の収束・発散の結果は証明なしで用いても構わない。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

ヒント (1) Taylor の定理より $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2\cos\theta x$ $(0<\theta<1)$ を用いよ。

(2) $2^n \geq n$ $(n=1,2,\dots)$ を用いよ。

8. $|a_n| \leq b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n)^{1/n}=\alpha<1$ であるとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束をすることを示せ。

ヒント $\varepsilon=(1-\alpha)/2$ として仮定 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n)^{1/n}=\alpha$ を定義に従って書き下してみよ。