微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 5 回目　出題日 2001 年 6 月 19 日

1. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{\sin^2 x}$　　(2) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

(3) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　　(4) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^{\frac{1}{x}}$

2. 関数 $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ の定義域および導関数を求めよ。

3. 関数 $x = \dfrac{3at}{1+t^3},\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ に対し $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

4. 次の関数の n 階導関数を求めよ。

(1) $x^3 e^x$　　(2) $\sin 3x \cdot \cos x$　　(3) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

5. (1) $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとする。このとき、$f'(x) = 0$ $(a < x < b)$ であれば $f(x)$ は定数関数であることを平均値の定理より導け。

(2) $\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{2},\ \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{2}$ を求めよ。

(3) $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$ を示せ。
ヒント：$f(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ に対し (1) を用いよ。

6. $f(x)$ が微分可能かつ $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ とする。このとき、

$$\lim_{h\to\infty} (f(x+\beta) - f(x)) = \alpha\beta$$

であることを証明せよ。

7. $f(x)$ が区間 I で C^2-級、$a \in I$ とする。$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ $(0 < \theta < 1)$ とすれば、$f''(a) \neq 0$ ならば、

$$\lim_{h\to 0} \theta = 1/2$$

であることを証明せよ。