微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　テスト 4 回目　出題日 2001 年 6 月 5 日

1.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\{2\log(1+x)-\log(1+2x)\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$

2.　次の関数について、$f'(0), f'_+(0), f'_-(0)$ が存在するか。存在すればそれを求めよ。

(1) $f(x)=|x|-\sin|x|$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+1} & (x\geq 0)\\ ax^2+bx+1 & (x<0)\end{cases}$　(ただし、a, b は定数。)

3.　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=(x^2+x+1)^{100}$　　(2) $f(x)=(1+x^2)^{1/x}$

(3) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}+\log(\tan x)$　　(4) $f(x)=\log\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}$

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

4.　xy 平面の曲線 $y=e^{-(x-a)^3}$ 上に異なる 3 点があり、それらの点における接線がすべて原点を通っている。このような、a の範囲を求めよ。

5.　$a>0, b>0$ とする。微分の定義から、$f(x)$ が $x=c$ で微分可能ならば、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+ah)-f(c-bh)}{(a+b)h}=f'(c)$$

であることを証明せよ。