微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 3 回目　出題日 2001 年 5 月 25 日

1.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+2x)^{1/3}-(1-2x)^{1/3}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+x-2}{|1-x|}$

2.　次の関数は、$x=0$ で連続であるか調べよ。

$$f(x)=\begin{cases}(1+e^{1/x})^{-1} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

3.　次の関数のグラフをかき、定義域および連続性を調べよ。

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}\right)$$

4.　$f(x), g(x)$ が連続関数とする。$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ とすると、$\varphi(x)$ も連続関数となることを示せ。

5.　(1)　区間 I において $f(x)$ も $g(x)$ も連続とする。有理数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき、I 上のすべての点 x に対しても $f(x)=g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　f が、すべての $x,y\in\mathbf{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ連続ならば、$f(x)=f(1)x$ $(x\in\mathbf{R})$ となることを示せ。

注意　(2) で f が連続でない場合、$f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たしかつ $f(x)=f(1)x$ を満たさない関数 f を構成できる。

6.　$\mathbf{R}$ 上の連続関数 f が次の条件 $(*)$ を満たせば、$y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ と必ず交わることを証明せよ。

$$(*)\qquad |f(x)|\leq a|x|+b\qquad (x\in\mathbf{R})$$

ただし、$0<a<1,\ b>0$ は定数。

ヒント　中間値の定理を用いる。