微分積分学 AD I，数学序論演習 I　テスト 2 回目　出題日 2001 年 5 月 8 日

1.　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

2.　e の定義 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ を導け。

3.　収束の定義から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ で $\alpha\neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$$

を導け。

4.　「有界な単調数列は収束する」を用いて、

$$a_1=10,\quad a_{n+1}=1+\sqrt{a_n}\quad (n=1,2,\ldots)$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

5.　$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},\ n\geq 1$ によって定義される数列について以下を示せ。

(1) $\displaystyle|a_{n+1}-a_n|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}|a_n-a_{n-1}|,\ n\geq 2,$ を示せ。

(2) $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示せ。

(3) (2) より $\{a_n\}$ は収束列である。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

6.　A,B を $\mathbf{R}$ の空でない有界な部分集合とし

$$C=\{\,x+y\,;\,x\in A,\,y\in B\,\}$$

とおく。このとき、

$$\inf C=\inf A+\inf B$$

を証明せよ。