微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　テスト　　出題日　2001 年 4 月 24 日

1.　第 n 項が、次で与えられる数列の極限値を求めよ。（高校の復習）

(1)　$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}$　　　(2)　$\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(3)　$\dfrac{\cos n\theta}{n}$　(θ は定数)　　　(4)　$\dfrac{1}{n^3}\{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)\}$

(5)　$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

2.　次の集合 A に対し、$\sup A$, $\inf A$ を求めよ。(答えのみでなく理由も書け。)

(1)　$A=\{\,x\in\mathbf{R}\,;\,|x-2|<1\,\}$　　　(2)　$A=\left\{\,(-1)^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{n}\right)^n\,;\,n\in\mathbf{N}\,\right\}$

3.　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ の定義を述べよ。

(2)　上記を用いて、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$ を示せ。

4.　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ の定義を述べよ。

(2)　$a_n=(n!)^{1/n}$ とする。$\{a_n\}$ が単調増大数列であることを示せ。

(3)　(2) で定めた a_n に対し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ を示せ。

ヒント　勝手な正数 M に対し、ある番号 n_0 と正数 C がとれて

$$n>n_0 \implies n!\geq CM^n$$

となることをまず示せ。(上記の n_0 と C を M などを用いて具体的に表わせ。)