微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 8 月 3 日の試験の解答の要点

1　(1)　$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \left\{ \frac{1/3}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1/2}{x^2-x+1} \right\} dx$ (*cf*. 教科書 p.151 問 2 (1))

(2)　$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx = \int \left\{ 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right\} dx = x + \log|x| + \log|x-1| - \frac{2}{x-1}$

(3)　$\frac{4}{3}x^{3/4} - 4x^{1/4} + 4\,\mathrm{Arctan}\,\sqrt[4]{x}$　　($t = \sqrt[4]{x}$ とおけ)

(4)　$\frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+1})^2 + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})$　　($t = x+\sqrt{x^2+1}$ とおけ)

(5)　$t = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$ とすると $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}} = \int \frac{2dt}{t^2-2} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\sqrt{2-x}}\right|$

(6)　$t = x+\sqrt{2+x^2}$ とおくと

$\int$(与式)$dx = \int \left(\frac{1}{2}t^{1/2} + t^{-3/2}\right) dx = \frac{1}{3}(x+\sqrt{2+x^2})^{3/2} - \frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{2+x^2}}}$

(7)　$t = \tan\frac{x}{2}$ とすると $\int$(与式)$dx = \int \frac{t^2+2t+1}{2t}dt = \frac{1}{2}\log|\tan\frac{x}{2}| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}$

(8)　$\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(2\tan x)$　　($t = \tan x$ とおけ)

(9)　$t = \tan\frac{x}{2}$ として $\int$(与式)$dx = \int \left\{ \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right\} dt = 2\,\mathrm{Arctan}\,t + \frac{2}{t+1} = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

2　漸化式は授業中示した。$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\,\mathrm{Arctan}\,x$

3　(1)–(4) すべて収束（(1)–(3) は絶対収束、(4) は条件収束, (1)–(3) は絶対収束すれば収束することを用いる。）

(1)　$0 \le e^x - 1 \le ex$ $(0 \le x \le 1)$ より $\int_0^1 \left|\frac{1-e^x}{x^{4/3}}\right| dx \le e\int_0^1 x^{-1/3}dx = 3e/2$

(2)　ある M がとれて $\log x \le x^{1/4}$ $(1 \le x < \infty)$ より $\int_1^\infty \left|\frac{\log x}{x^{3/2}}\right| dx \le M\int_1^\infty x^{-5/4}dx = 5M$

(別解）$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{3/2}}dx = \int_1^\infty \left(-2x^{-1/2}\right)' \log x dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}dx = \frac{4}{5}$ と計算してもよい。

(3)　$f(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)}$ $(0 < x < \pi)$ に対し $f(0) = f(\pi) = 1/\pi$ とおくと、$f(x)$ は $[0,\pi]$ で連続だから与式は収束する。

(4)　$\int_1^M \frac{\cos x}{x^{1/2}}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x^{1/2}}\right]_1^M + \frac{1}{2}\int_1^M \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$ より教科書 p.157 例題 3 と同様に示せる。

総括　配点は各 5 点で、70 点満点です。