微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 7 月 17 日の試験の解答の要点

1 (以下は解答の一例に過ぎない)　(1) $\pi/4$ ($x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおけ)

(2) $3(\log 2-\frac{1}{2})$ ($t=1+\sqrt[3]{x}$ とおけ)　(3) $\sqrt{3}\pi/9$　(4) $\log 2-2+(\pi/2)$

(5) (与式) $=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(1+x^2)\right\}'\operatorname{Arctan}x\,dx=\cdots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(6) (与式) $=\int_0^{\pi/4}\log\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\frac{\pi}{4}\log 2-\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan t)dt=\frac{\pi}{4}\log 2-$ (与式) より (与式) $=\frac{\pi}{8}\log 2.$

2 (1) 2　(2) (与式) $=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{dx}{x(1+x^2)}=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{M^2}{1+M^2}+\frac{1}{2}\log 2\right)=\frac{1}{2}\log 2.$

3 授業で示したので略

4 (1) (与式) $=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(1+\sqrt{2})$　(2) (与式) $=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=1/3$

5 定義に従い計算すると、どんな $[0,1]$ の分割 Δ に対しても $s(f,\Delta)=0$, $S(f,\Delta)=1$ となるから定積分可能ではない。

6 Riemann 和を用いてもよいが、以下のような方法もある。(むしろ汎用的。)
ヒントの式で $t=f(x)$ とし、x について $[a,b]$ 上で積分し、$b-a$ で割ると、
$-\frac{1}{b-a}\int_a^b\log f(x)\,dx\geq-\frac{1}{c}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-c\right)-\log c$　$(c>0)$ を得る。
ここで $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx(>0)$ を代入し、両辺を -1 倍すれば与式を得る。

総括　配点は **1** (1)–(3) が各 4 点、**2** が各 6 点、それ以外が各 5 点で、64 点満点です。
一般に、数学の記述問題は (簡略化された) 小論文形式による論述問題である。よって、例え計算問題においても、「答」が正しかろうと途中に論理の破綻があればそこで解答は間違いとなる。（だから論理の破綻のない計算間違いには部分点を与えられるのだが。）もちろんこの「試験の解答の要点」そのままの答えでは完全な解答とは言えない。（たいていは 0 点である。）解答は論理的破綻がないか必ずチェックすること。
私見であるが、「事実」が書かれている本は本当にそうなのかという批判的精神を持ちながら読むのが望ましいと思う。特に数学においては、その作業は比較的容易に思う。(一日も早くその能力を身につけることを期待する。) 一般に教科書といえども間違いがあることを忘れてはいけない。