微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 7 月 3 日の試験の解答の要点

1 (6/29 の授業で出題した問題)　$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = 0$ より $\alpha = \beta$ を得る。また、$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \beta = \alpha$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対し n_1, n_2 が存在して $n \geq n_1 \Rightarrow |s_{2n} - \alpha| < \varepsilon$ かつ $n \geq n_2 \Rightarrow |s_{2n+1} - \alpha| < \varepsilon$. これより $n_0 = \max\{\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\}$ とすれば、$n \geq n_0$ のとき n が偶数ならある $k \geq n_1$ がとれて $n = 2k$, n が奇数なら $k \geq n_2$ がとれて $n = 2k+1$ とできるので、$n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - \alpha| < \varepsilon$ が従う。即ち、$\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$ が示された。

2 (2) $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ とすれば、Taylor の定理より $f(x) = x + f'''(\theta x)x^3/3!$ $(0 < \theta < 1)$ を得る。よって (与式) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{x + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 - x}{x^3} = \dfrac{f'''(0)}{3!} = -\dfrac{1}{3}$ を得る。
(1) も同様に (与式) $= -1/8$ がわかる。

3 Taylor の定理より $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{e^{-\theta x}}{4!}x^4$ $(0 < \theta < 1)$ となるが、$x > 0$ のとき $0 < e^{-\theta x} < 1$ より結果を得る。

4 Taylor の定理より $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$ がとれて
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a+\theta_1 h)}{2}h^2$, $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a-\theta_2 h)}{2}h^2$ となる。よって (与式) $= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\{f''(a+\theta_1 h) + f''(a-\theta_2 h)\} = f''(a)$.

5 等比級数の和の公式を $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - \cdots + (-y)^{n-1} + \frac{(-y)^n}{1+y}$ と変形し両辺を 0 から x まで y について積分すれば第 1 式を得る。

第 2 式については第 1 式右辺の最終項が 0 に収束することを示せばよい。これは $0 \leq x \leq 1$ の場合 $\left|\int_0^x \frac{(-y)^n}{1+y}dy\right| \leq \int_0^x \frac{y^n}{1+y}dy \leq \int_0^x y^n dy = \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0$ ($n \to \infty$) より，
$-1 < x < 0$ の場合、$\left|\int_0^x \frac{(-y)^n}{1+y}dy\right| = \int_0^{|x|} \frac{y^n}{1-y}dy \leq \frac{1}{1-|x|}\int_0^{|x|} y^n dy \leq \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0$ となる。

注意：$\log(1+x)$ の Maclaurin 展開式については Taylor の公式からすぐにはわからない。これは x が -1 に近いとき Lagrange の剰余項が $n \to \infty$ のとき 0 に収束することが直接証明できないためである。(確かめよ。)

6 略、ただし、グラフをかくときは漸近線も記入すべきであることを注意しておく。

7 (教科書 p.121 の**定理 1.2 (比較による判定)** を用いる問題)
(1) ヒントより $\left|\cos\frac{1}{n} - 1\right| \leq \frac{1}{2n^2}$ となるから、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} < \infty$ より収束。
(2) ヒントより $n^{1+\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}n \leq 2n$、即ち $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{2n}$. よって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \infty$ より発散。

(3) 問題 **7** を用いると容易。これを用いれば $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right\}^{1/n}=e^{-1}<1$ から絶対収束することがわかる。従って収束する。

8 級数の比較による判定より $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$ が示されれば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することがわかる。ヒントよりある番号 n_0 が存在して、$n\geq n_0 \Rightarrow |(b_n)^{1/n}-\alpha|<\frac{1-\alpha}{2}$、即ち、$(b_n)^{1/n}<\alpha+\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1+\alpha}{2}<1$ となる。よって

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq b_1+\cdots+b_{n_0-1}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n \leq b_1+\cdots+b_{n_0-1}+\frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{n_0}<\infty$

を得る。

注意：この結果は級数の絶対収束を調べるとき、特に有用である。必ず証明を理解するとともに、使えるようにしておくこと。

総括 配点は各 5 点で、55 満点です。

Taylor の公式や級数の比較による判定は強力な道具です。必ず使えるようにしておくこと。

問題 **1** は授業中に試験までの解いておくように伝えた問題、問題 **3**, **7** は教科書の演習問題です。問題 **5**, **6** は高校の知識だけで解けます。総じて言えば勉強さえしていれば必ずできる問題のはずです。