微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 6 月 19 日の試験の解答の要点

1　l'Hopital の定理を断らずに用いている場合減点した。

(1) は標準的、(2) はまず通分する。(3),(4) はともに対数をとって考える。
ただし、(3) は $\frac{1}{x^2}\{\log\tan x - \log x\}$ と変形すると $x \to 0$ より ($x > 0$ と好意的に解釈しても) $\frac{-\infty+\infty}{0}$ となり不定形ではないので注意を要する。

2　$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1$ より定義域は $x \leq 0$ となる。
$x \leq 0$ より $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$ に注意すれば $f'(x) = -\{(1-x)\sqrt{-x}\}^{-1}$ がわかる。

3　略

4　(1)　Leibniz の公式を用いよ。

(2)　$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$ と $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$ を用いよ。

(3)　$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ と $\{\frac{1}{x-a}\}^{(n)} = (-1)^n n!(x-a)^{-n-1}$ を用いよ。

5　(1)　$\forall x \in (a,b]$ に対し平均値の定理から $f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi)$ $(a < \xi < x)$ となるが、$f'(\xi) = 0$ より、$f(x) = f(a)$ $(a < x \leq b)$ を得る。　　(2)　略

(3) $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$ とすると $f'(x) = 0$ より (1) から $f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ((2) も利用) を得る。$\sin(\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x) = 1$ を利用した解答については $-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x \leq \frac{3\pi}{2}$ に言及する必要があることに注意。

6　平均値の定理より $f(x+\beta) - f(x) = \beta f'(x+\theta\beta)$ $(0 < \theta < 1)$ と変形して $x \to \infty$ とせよ。

7　例えば、以下のようにして示せる。$f''(a) \neq 0$ より f' は $x = a$ の近くで逆関数 $(f')^{-1}$ をもつから $\theta = \frac{1}{h}\left\{(f')^{-1}(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}) - a\right\}$ と変形し l'Hopital の定理を用いて計算していけば示せる。(Taylor の公式を用いた証明が標準的であろう。)

総括　配点は **5**(1),(2) を除き各 5 点で、65 満点です。**1**(2)–(4) は少し面倒でしょうが、**4** は勉強さえしていれば容易な問題のはずです。

杉浦　誠