微分積分学 AD I，数学序論演習 I　　2001 年 6 月 5 日の試験の解答のヒント

1 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{-1}\log\left(1+\frac{x^2}{1+2x}\right)^{\frac{1+2x}{x^2}}$ と変形し、$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e$ を用いよ。

(2) $\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}$ を用いよ。

2 $f'_+(0), f'_-(0)$ を定義に従って求める。もし $f'_+(0)=f'_-(0)$ ならば $f'(0)$ は存在する。もし $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ ならば $f'(0)$ は存在しない。

注意　一般に $f(x)$ が $[0,a)$ 上連続かつ $(0,a)$ 上微分可能で $\displaystyle\lim_{x\to +0}f'(x)=\alpha$ が存在すれば、$f'_+(0)=\alpha$ となる（平均値の定理の系）。この定理を用いた解答は（この定理の利用を明記したもの以外）不正解とした。実際、問題 **3** (5) のようなことも起こるので、このような極限操作は非常な注意を要する。

3 (1) $100(2x+1)(x^2+x+1)^{99}$　　(2) $(1+x^2)^{1/x}\{2(1+x^2)^{-1}-x^{-2}\log(1+x^2)\}$

(3) $e^{2x}(2x-1)x^{-2}+(\sin x\cos x)^{-1}$　(4) $1/\sqrt{1+x^2}$

(5) $x\neq 0$ のとき $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，$f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h^2\sin\frac{1}{h}-0\right)=0$

ここでは $f'(0)$ は存在しても、$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ は存在しないことに注意されたい。

4 略

5 $\displaystyle\frac{f(c+ah)-f(c-bh)}{(a+b)h}=\frac{a}{a+b}\frac{f(c+ah)-f(c)}{ah}+\frac{b}{a+b}\frac{f(c-bh)-f(c)}{-bh}$ を用いよ。