微分積分学 AD I, 数学序論演習 I　　補充問題　　出題日 2000 年 4 月 13 日

1.　次の集合 A に対し、$\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$ を求めよ。

(1) $A = \{ x \in \mathbf{R} ; -1 < x \leq 1 \}$　　(2) $A = \{ x \in \mathbf{R} ; |x-a| < 1 \}$

(3) $A = \{ x \in \mathbf{R} ; |x| < |a| + 1 \}$　　(4) $A = \{ r \in \mathbf{Q} ; -1 \leq r \leq \sqrt{2} \}$

(5) $A = \left\{ (-1)^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbf{N} \right\}$　　(6) $A = \left\{ n \sin \dfrac{1}{n} ; n \in \mathbf{N} \right\}$

2.　$A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ に対し

$$B = \{ -x ; x \in A \}$$

とおく。このとき、

$$\sup B = -\inf A, \qquad \inf B = -\sup A$$

を証明せよ。ただし、$-(-\infty) = \infty$, $-(\infty) = -\infty$ と約束する。

3.　A を開集合 $(0, \infty)$ に含まれる空でない部分集合とし

$$B = \left\{ \frac{1}{x} ; x \in A \right\}$$

とおく。このとき、

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}, \qquad \inf B = \frac{1}{\sup A}$$

を証明せよ。ただし、$\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ と約束する。

4.　A, B を $\mathbf{R}$ の空でない有界な部分集合とし

$$C = \{ x + y ; x \in A, y \in B \}$$

とおく。このとき、

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

を証明せよ。

5.　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ を示せ。

6.　$a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + \cdots + a_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ とする。$\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

7.　次の数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1}$　　$(n \in \mathbf{N})$

(2) $a_1 \geq 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$　　$(n \in \mathbf{N})$

(3) $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1,\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$　　$(n \geq 3)$