基礎ゼミ I 3, 4 組　問題 7　 2012 年 5 月 28 日配布

$n \in \mathbb{N}$ に対して, Legendre(ルジャンドル) の多項式 $P_n(x)$, Hermite(エルミート) の多項式 $H_n(x)$, Laguerre(ラゲール) の多項式 $L_n^\alpha(x)$, $(\alpha > -1)$ をそれぞれ次の式で定義する．[*1]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

この講義では, n 次正方行列の $A = (a_{ij})$ トレースを $\mathrm{Tr}\ A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ と書くことにする．

問 7.1. 数列 $\{a_n\}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ であることの定義を, $\varepsilon - N$ 論法を用いて述べよ．

問 7.2. 数列 $a_n = (-1)^n$ は収束しないことを, $\varepsilon - N$ 論法で示せ．

問 7.3. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないことの定義を, $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて述べよ．

問 7.4. Heaviside(ヘビサイド) 関数 $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqq 0 \end{cases}$ は $x = 0$ で連続でないことを, $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ．

問 7.5. 次の関数の n 階の導関数を計算せよ．

(1) $(ax+b)^\alpha$　(2) $\log(1+x)$　(3) $\dfrac{1}{1-x^2}$　(4) x^2e^x　(5) $x^3\cos x$　(6) $e^x \sin x$

問 7.6. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin^{-1} x}{x^3}$

問 7.7. $P_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ．

問 7.8. $(x^2-1)P_n(x)'' + 2xP_n(x)' - n(n+1)P_n(x) = 0$ を示せ．

問 7.9. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ を示せ．

問 7.10. $H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ．

問 7.11. $H_n(x)' = 2nH_{n-1}(x)$ を示せ．

問 7.12. $H_n(x)'' - 2xH_n(x)' + 2nH_n(x) = 0$ を示せ．

問 7.13. $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ を示せ．

問 7.14. $L_n^\alpha(x)$ は n 次の多項式となることを示せ．

問 7.15. $xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha+1-x)L_n^\alpha(x)' + nL_n^\alpha(x) = 0$ を示せ．

問 7.16. $(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0$ を示せ．

問 7.17. 正方行列 A が $A^2 = A,\ A \neq E$ なら A は正則でないことを示せ．

問 7.18. 正方行列 A が, ある $k \geqq 1$ が存在して $A^k = O$ であるとき, $(E+A)^{-1}$ を求めよ．

問 7.19. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ は, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすとき, 確率行列であると言う．A, B が確率行列であるとき, AB も確率行列になることを示せ．

問 7.20. (n,m) 型行列 A と (m,n) 型行列 B に対して, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が成立することを示せ．

問 7.21 (直交行列の Cayley(ケイリー) 変換)**.** n 次正方行列 P が ${}^tPP = E$ を満たすとし, $P+E$ が正則であるとする．このとき, $A = (P-E)(P+E)^{-1}$ は, ${}^tA = -A$ を満たすことを示せ．

[*1] 文献によっては, これらの定義は定数倍違っていることがある．