

情報科学演習
第12回
数式処理系 Maple 入門

目 次

1	はじめに (Maple とは)	1
2	Maple の起動と使い方	1
2.1	初期設定	1
2.2	簡単な計算	2
2.2.1	様々な定数, 手続き (関数)	2
2.2.2	パッケージ (package) を利用する	4
2.3	グラフィックス機能	5
2.4	Help	5
3	次回の予告	6

1 はじめに (Maple とは)

今回は数式処理系 Maple を紹介します。数式処理とは、数学で行う計算、即ち、式の展開、因数分解、微分、積分、方程式を解く、逆行列を求める、固有値計算等を数式のままコンピュータでする事を指します¹。実際 Maple, Mathematica, Macsyma (MAXIMA) 等の数式処理ソフトは、大学初年級以上の数学を処理する能力を持っており、数学教育で用いるソフトとして便利です、研究上の実験ソフトとしても役に立ちます。

Maple は、Canada の Waterloo 大学で開発された数式処理ソフトです。Maple は、沖縄では見ませんが、楓という木の事です。Canada 国旗の中央部には楓の葉がデザインされています²。現在、Waterloo Maple Inc. が販売しております。サポートされている OS は、MacOS, Windows, Solaris, Linux (i386) 等です。

Maple の開発は、1980 年頃に始まったようです。私が初めて Maple に触れたのが 1987 年位で、当時の Version が 4.7 でした。この頃、ようやくパーソナルコンピュータ (Mac) で、Maple が動くようになりました。

このテキストでの約束： このテキストでは、> で始まっている行は、Maple の入力です。

情報処理センターの実習室のマシンに、Maple が入っています。Maple は一般ユーザ版は 20 万円以上しますが、大学生協を通して学生版を買うと、20000 円 (税抜き) 程度で購入出来ます。詳しくは、生協に問い合わせして下さい。

2 Maple の起動と使い方

Linux 版 Maple は、アイコンやメニューからは起動できません。次の手順で、端末エミュレータからコマンドを打って起動します。

1. メニューで、「アプリケーション → アクセサリ → GNOME 端末」とたどって、GNOME 端末を開く。
2. 端末エミュレータのウィンドウで、xmaple とタイプしてエンターキーを押す。

xmaple の最初の文字 x は、Linux の利用している X Window System の x です。maple 自身は Window System なしでも全ての処理ができますが、グラフィックな環境が無いと面白くないので、今回はグラフィカルな環境を利用します。Linux 版は英語版 (日本語化されていない) のですが、使うだけなら難しい英語は不要ですので、この程度の英語には慣れるようにして下さい。

maple が起動すると、何を行うかを問う初期 (Startup) 画面が出ますが、ここでは、下の「Close」を押して、このウィンドウを閉じて下さい。

2.1 初期設定

今のバージョンの Maple では、入力した添字や分数がそのまま表示されるようになっています。しかし、実際にこのように表示させると却って入力が面倒なので、入力のしやすい環境に変更します。

Maple ウィンドウのメニュー「Tools」を選び、下から 2 つめの「Options...」を選ぶと、設定ウィンドウが現れます。上部にいくつかタブがありますが、左から 2 つめの「Display」のタブを選びます。その欄の一番上にある「Input Display」を「2-D Math Notation」から「Maple Notation」に変更します。その後、下にある真中のボタン「Apply Globally」を押します。

¹ 数式を美しく印刷する作業を数式処理と言う人もいますが、通常はこちらは組版処理といひます

² 個人的には、バンケーキのシロップは、メイプルシロップ。

2.2 簡単な計算

ウィンドウのメニューバーの下にアイコンが並んでいますが、これらのうち、中央付近にある (T の字の右にある) 「>」となっている所をクリックして下さい。ウィンドウ内に赤く不等号 > が出てきます。ここに数式を入力する事で計算ができます。メニューバーの File メニューの New を使えば、このウィンドウは新たに作る事もできます。

Maple の四則演算の記号はそれぞれ、+, -, *, / です。Maple では冪乗と階乗が定義されており、それぞれ、^ と ! を用います。Maple では、文の最後をセミコロン ; で終ってエンターキーを押しますと、文の評価結果が出力されます。エンターキーだけでは単なる改行となります。文中の改行は無視されます。文中の括弧 () は数学と同じ意味になります。四則演算の優先順位も数学と一致します。次を実行してみてください。

```
> 1 + 2;  
> 10/3 + 2;  
> 10/3.0;  
> 2^10;  
> 50!;  
> (a+a-b)*c/d;  
> a^2 + a;
```

有理数の扱い、文字式の扱いが数学と一致します。小数が式に含まれていれば、自動的に小数扱いされます。

2.2.1 様々な定数, 手続き (関数)

Maple では、数式処理のための手続きが 2700 以上定義されています。それらを全部解説する事は不可能ですので、ここではその一例をあげます。これらの例の中に初等関数が用いられていますが、それらの意味は容易に類推できると思いますので、これについての解説はいちいちしません。

数式処理に欠かせない定数 (円周率等) が既に定義されています。円周率は、Pi という記号を使います。関数に値を代入する時には、必ず括弧 () が必要で、しかも数式計算上の括弧は、これ以外には使えません。{ }, [] は別の意味になります。

```
> Pi;  
> cos(Pi/4);  
> tan(Pi/2);  
> arctan(-infinity);
```

$\sqrt{2}$ がそのまま出て来る事、tan の不定値に対するエラーメッセージに注意して下さい。arctan は逆正接関数、infinity は無限大の事です。最後の答は、極限值を出力しています。

Maple では、有理数、冪根、円周率等の定数は、そのまま出力されます。上の逆正接関数の計算でもそうですし、例えば、 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ も次で計算させると、円周率を使った答が出ます。

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity);
```

これを小数へ変換するには、evalf という手続きを用います。

```
> evalf(Pi^2/6);
```

Maple では、非常に正確な数値計算ができます。例えば、 $e^{\pi\sqrt{163}} - 744 - 640320^3$ を C 言語の数学関数で計算しますと -480 という答えを得ます。Maple を使うと、C 言語の計算がとんでもない誤差を含む事がわかります。起動時では、浮動小数点の仮数部は 10 桁に設定されており、そのままですと、この結果は真の値の約 40 倍という答えになります。そのため仮数部の桁数を事前に設定します。仮数部の桁数は、Maple のシステム変数 Digits に格納されていますから、この値を変更します。Maple では変数への代入に $:=$ を用います。

```
> Digits:=50;
> evalf(exp(Pi*sqrt(163))-744-640320^3);
```

C 言語のライブラリを用いた計算が、真の値の 6×10^{14} 倍以上の値になっている事がわかります。

課題 (難): $e^{\sqrt{163}\pi}$ の値が整数に近い理由を調べよ。菅にこれを説明できる人は、卒業まで私が担当する科目の全ての単位を (授業登録すれば) A であげます。(同じ理由で、 $e^{\sqrt{67}\pi}$ も整数に近い.)

文字式の展開, 因数分解も可能です。

```
> expand((x+y)^5);
> factor(a^8-b^8);
```

次の問題は、2000 年の琉球大学入学試験問題前期日程数学甲の 1 です。

1. 関数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を微分せよ.
2. 不定積分 $\int x\sqrt{x^2+2} \, dx$ を求めよ.
3. 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^{2e} x^3 \log x \, dx$ を求めよ.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 - x}{x^2}$ を求めよ.

このような単純な計算は、Maple は得意です。(試験では、答だけを書いても満点にはならないと思います。) Maple V では、直前の結果を % で参照できます。

```
> diff(x/sqrt(1+x^2),x);
> simplify(%);
> int(x*sqrt(x^2+2),x);
> int(x^3*log(x), x=exp(-1)..2*exp(1));
> limit((sqrt(2*x+1)-1-x)/x^2, x=0);
```

方程式 $f(x) = 0$ の解を求める様々な方法も Maple には用意されています。 $f(x)$ が 4 次以下の多項式なら、この方程式には代数的な解法が存在する事が知られています。(3 年の代数学 I・II で勉強する予定です。) Maple はこれらの解法を知っており、solve という手続きになっています。次を実行してみてください。これらの解には複素数が含まれますが、Maple では虚数単位は大文字の I で表示されます。

```
> solve(x^3+1,x);
> solve(x^3+3*x+1,x);
```

5 次以上の方程式には、代数的な解法が一般には存在しない事が知られています (代数的という制限を外せば、別な解法はあります)。次を実行してみてください。

```
> solve(x^5+x^2+1, x);
```

$\text{RootOf}(-Z^5 + Z^2 + 1)$ という解が出て来ます。もちろん、これは単なるトートロジーに過ぎないのですが、Maple は代数的数を扱えるので、この解 (代数的数) を用いた計算が今後記号的に可能です。

代数的な解法がある場合でも、その解法が複雑な場合には、残念ながら代数的な解を出力しません。例えば、1 の 7 乗根を計算させようとしても、de Moivre の公式から出てくる解が単純に出力されるだけです。

```
> solve(x^7-1, x);
```

上で述べたように Maple では、代数的数が扱えます。これを利用すると、 $x^7 - 1 = 0$ の代数的な解も求める事ができます。 $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ ですが、積の右側の 6 次式は $\sqrt{-7}$ を使うと、2 つの 3 次式の積に因数分解されます。この様な因数分解は、付け加える数を `factor` の第 2 引数に加える事で可能です。

```
> factor(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1, (-7)^(1/2));
```

従って、1 の複素 7 乗根は、次の 2 つ方程式の解全体です。

```
> solve(2*x^3+x^2-I*sqrt(7)*x^2-x-I*sqrt(7)*x-2,x);
```

```
> solve(2*x^3+x^2+I*sqrt(7)*x^2-x+I*sqrt(7)*x-2,x);
```

$f(x)$ が 5 次以上の多項式や、多項式以外の場合には、一般的な解法が存在しません。このような方程式の近似解を数値的に計算する方法も Maple は知っています。上の方程式の数値解も、次で計算してくれます。

```
> fsolve(x^5+x^2+1, x);
```

実際、関数のグラフを描画する `plot` を使って、

```
> plot(x^5+x^2+1,x=-5..5);
```

```
> plot(x^5+x^2+1,x=-2..0);
```

等を実行しますと、`fsolve` で求めた値が $x^5 + x^2 + 1 = 0$ の唯 1 の実数解の近似値である事がわかります。

2.2.2 パッケージ (package) を利用する

これまでの計算では、特別な事をせずともそれを実行しますが、行列の計算などはそのままでは実行してくれず、それを計算するためのパッケージ (ライブラリ) を呼び出す必要があります。ここでは、線形代数学のパッケージを呼び出して、そこで定義されている計算を試みます。

パッケージを読み込むには `with` という手続きを使います。線形代数学のパッケージ名は `linalg` となっておりますので、次のように入力します。

```
> with(linalg);
```

この時に出力されるのが、`linalg` のパッケージで定義されている手続き名です。一例をあげますと、次のようになります。

```
> B:= matrix(2,2);
```

```
> trace(B);
```

```
> det(B);
```

```
> inverse(B);
```

```
> eigenvalues(B);
```

どのようなパッケージが利用できるかは、手続き `help` に引数 `package` をいれて利用する事でわかります。

```
> help(package);
```

2.3 グラフィックス機能

上でも述べたように、例えば、 $\sin x$ の関数のグラフを書くには、次のように入力します。

```
> plot(sin(x), x = -Pi .. Pi);
```

2変数関数のグラフも簡単に書けます。

```
> plot3d(cos(2*x^3+y^2), x=-2..2, y=-2..2);
```

マウスの左ボタンで図形を掴んで動かせば、立方体が動きます。

Maple では、座標を順に与えてそれを線分で結び多角形を描く事ができます。まずは、グラフィック表示のためのパッケージ `plots` を読み込みます。

```
> with(plots);
```

次を実行して見て下さい。

```
> cornercoordinates := [[0,0],[1,0],[1,-1],[0,-1]]:
> asquare := polygonplot(cornercoordinates):
> display(asquare);
> ngon := n -> [seq([cos(2*Pi*i/n),sin(2*Pi*i/n)], i = 1..n)]:
> display([polygonplot(ngon(8))]);
> fivestar:= [seq([cos(2*Pi*(2*i+1)/5),sin(2*Pi*(2*i+1)/5)], i = 1..5)]:
> display([polygonplot](fivestar));
```

2.4 Help

Maple 本体のウィンドウのメニューバーの右端にヘルプメニューがあります。ここからさまざまな機能を知る事ができます。Maple は非常に多機能です。ヘルプブラウザーで必要な項目にたどり着くのも大変です。ブラウザー以外にもヘルプメニューの Topic Search, Full Text Search で検索することができます。さらに、上で述べたように Maple のプロンプト行で

```
> ? キーワード
```

あるいは

```
> help(キーワード);
```

とすると、Topic Search とほぼ同じ事が実行されます。次でも、利用上役立つ様々な情報が得られます。

```
> help(help);
```

ヘルプメニューの中に「Take a Tour of Maple」と言うのがあります。Maple の使い方が一通り (英語で) 説明されます。残った時間はこの Maple ツアーをやってみて下さい³。また、微積分や線形代数の教科書の問題を Maple で解いてみて下さい。(解答にそこそこ間違いがあったりして...)

2002 年の計算機言語 I で Maple を用いたプログラミングの講義を行いました。そのときのテキストが (L^AT_EX ファイルですが)、次の場所にあります。今回のテキストは、そこにある 1.tex を改訂した物です。使い方をより知りたい方は、参考にして下さい。Maple の version が当時から大分上がっていますが、内容は今でもほとんど通用するはずで、来年の計算機概論 I でも、もう一度 Maple を取り上げる予定です。

³ このような数学用ソフトやプログラミング言語の記述、あるいはそのエラーメッセージは、ほとんどの場合英語になります。それは、これらが世界中で開発されており、そのときの共通言語が英語になってしまったからです。そのような英語のメッセージを日本語訳することは、なされてない場合が多くあります。従って、英語に対するアレルギーをなくすとともに、そのメッセージを読む訓練をしておくことは、将来の役に立ちます。文学のような難しい表現はありませんので、はやいうちに慣れて下さい。

3 次回の予告

次週は、もう一度 Web ページ作成に戻ります。以前に言っておいた、オリジナルページを作ってください。取材した材料を持って来て下さい。オリジナルページですが、特にネタとかがなくても、高校時代に情報 B とかで Javascript 等を勉強したことがあれば、それで作った簡単なプログラムを置くのでも構いません。成績評価の基準となる Web ページ完成締切は 7 月 31 日 (金) とします。

参考文献

- [1] B. W. Char 他, サイバネットシステム記, はじめての Maple, 1998, シュプリンガーフェアラーク東京
- [2] B. W. Char 他, サイバネットシステム記, よくわかる Maple, 1998, シュプリンガーフェアラーク東京
- [3] K. M. Heal, M. Hansen, K. Rickard 著, 示野信一他訳, Maple V Release 5 ラーニングガイド, 1999, シュプリンガーフェアラーク東京
- [4] 示野信一著, Maple V で見る数学ワールド, 1999, シュプリンガーフェアラーク東京

Maple の使い方の参考書です。どれも古い本なので今とは少し使い方が異なる部分もありますが、そのときには Help で調べて下さい。

無料の数式処理形で古くからある有名なものとして、MAXIMA(macsyma) というものもあります。数式処理系は使いたいがお金はないという方は、これをネットから取ってきて使うという手もあります。使い方は自習して下さい。また、MAXIMA 以外にも数学計算のための無料ソフトも沢山あり、これらのうち、有用なものをまとめて使えるようにしたものとして、sage というものもあります。sage は python というプログラミング言語を制御用の言語として用いて、様々な数学ソフトを一括して利用できるようにしているものです。Sage はネットワークを利用して、スマートフォンやタブレット端末でも利用できます。こちら、興味を持った人は、ネットでいろいろ調べて下さい。上に述べた Sage や、これ以外の数学用の無料ソフトをパッケージ化し Linux 上にまとめたものとして、MathLibre というものが日本でも開発されています。USB メモリから起動可能なので、試してみる価値はあります⁴。

⁴ USB 2.0 だと、データ転送速度が遅く、常用するにはちょっとつらい。USB 3.0 対応のものだとましになるのかも知れませんが、私はそれを持っていない。DVD 起動も可能ですが、USB よりも遅いのでかなりつらくなります。