代数学序論演習 I 講義ノート

2023 年 7 月 4 日

http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~suga/introalg/lecturenote.pdf

序

以下は, 2023 年度, 琉球大学理学部数理科学科 2 年次対象の科目「代数学序論演習 I」の講義ノートである. 1 年次対象の線形代数学 I, II, 数学序論 I, II, 微分積分学 I,II で講義されているであろう内容の証明で簡単なものは, 多くを省くか問としてある. 文中の問は授業においてその解答を発表すると, 評価点に加点する. また, そのための時間を, 授業において儲ける.

1 年次で用いた線形代数学の教科書 [1] は, 数理科学科の教科書としては少し物足りない内容である. 末尾の参考文献に挙げた [2], [3], [4], [5] あたりを購入して一通り読むことを期待します.

社会の中で線形代数学が使われている例として, SEGA の社内での勉強会をまとめたものがあります.

https://www.slideshare.net/SEGADevTech/ss-249343092

興味のある方は, これを読んで立派なゲームプログラマになってください.

文中の問

この講義は演習科目です. 文中の問はその解答を講義中に発表すれば, 評価に加点します.

注意

この文書は, まだ作成途中です. 間違っている内容が, 多数含まれている可能性があります. ダウンロードする際には, タイトル下の日付欄を見て下さい. 日付が以前のものと変わっていたら, 加筆や修正 (間違いの訂正) が行われています. 以下の更新履歴も常に確かめてください.

更新履歴

2023 年 4 月: 不完全なまま最初の公開.

記号と言葉遣い

以下で用いる記号をまとめておく．

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合とする．自然数には, 0 を含めないとする．
2. 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ に対して, $f(\theta) = 0$ となる $\theta \in \mathbb{C}$ を $f(x)$ あるいは f の根 (root) という．
3. 集合 A に対して, $|A|$ を A の濃度 (有限集合の場合は, 個数) とする．集合の濃度については, 有限が無限かは問題にするが, 無限集合の濃度を問題にすることはない．
4. 共通部分を持たない和集合 (disjoint union) を記号 $\sqcup$ を用いて表す． すなわち, $A = B \sqcup C$ は, $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ の意味で用いる．
5. 集合 A から A への恒等写像を id_A と書く．すなわち, $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}(a) = a$, $a \in A$ である．
6. 集合 A, B と写像 $f : A \to B$ に対して, $f(A) = \mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$ を f の像という．また, B の部分集合 C に対して, C の原像を $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ とする．特に C が 1 点集合 $\{y\}$ のときには, $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ と略記する．同様に, 1 点集合の場合, 集合と元を区別しないで書くことは多くある．
7. A, B を集合とし, $f : A \to B$ を写像とする．$\mathrm{Im}(f) = B$ であるとき, f を全射, あるいは上への写像 (surjection) という．f が 1 対 1 の写像であるとき, f は単射であるとか, 中への写像 (injection) という．特に, $A \subset B$ であるとき, A の元を B の元であると見る自然な単射がある．この写像は, 埋め込み (embedding) あるいは包含写像 (inclusion) という．逆に, $f : A \to B$ が単射であるとき, $f(A) \subset B$ を A と同一視して, B の部分集合であると見ることもある．このときにも, f を埋め込みという．f が全射かつ単射であるとき, f は全単射 (bijection) であるという．
8. A, B を集合, $f : A \to B$ を写像とする．$C \subset A$ に対して f の C への制限で決まる写像を, $f_{|C} : C \to B$ と書く．
9. 整数 a, b に対して, $a \mid b$ は, a は b の約数 (b は a の倍数) を意味する．そうでないときは, $a \not| \, b$ と書く．0 はすべての整数の倍数であり, 0 でないどの整数の約数でもない．(a, b) は, a, b の最大公約数とする．
10. 虚数単位は i を用いる．複素数 $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対してその共役複素数を $\overline{z} = a - bi$ とする．複素数 $z = a + bi$ の大きさ (ノルム) は, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ で定義される．
11. 数ベクトルは, $\boldsymbol{x}$ のように太文字で書くことにする．
12. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ をクロネッカー (Kronecker) の記号として用いる．
13. (漢字圏以外の) 外国人の姓は基本的にアルファベット表記とした．

目次

1　線形代数学 I, II のまとめ

この講義では, まず, 1 年次の時に学んだ線形代数学の続きを講義する.

線形代数学では, スカラー全体の成す集合の性質が, 結果に影響を与えることがある. この講義の前半では, スカラー全体の集合は実数全体 $\mathbb{R}$, もしくは複素数全体 $\mathbb{C}$ のいずれかとする. 後半では, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 以外の集合がスカラー集合となる場合も考える.

スカラー集合, ベクトルや行列の成分がどの数であることを明示する時には, 実ベクトル, 複素ベクトル, 実行列, 複素行列, etc. と書くことにする. これらほ形容詞がついていない場合は, 成分の数集合の性質によらない性質を述べていると理解していただきたい.

講義前半で現れる複素数と実数の大きな差異は, 次の二つである.

1. 実数には, 有理数から拡張された大小関係が存在し, よく知られた性質を持つ. 特に, 正負の概念がある. 複素数には, この実数の大小関係の良い拡張がない.
2. 複素数では, 代数方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0, n \geqq 1)$ は必ず根を持つ. すなわち, ある $\theta \in \mathbb{C}$ が存在し, $a_n\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0$ が成立する（複素数体は代数的に閉じているという.). 実数の範囲では, $x^2 + 1 = 0$ のように実数根を持たない方程式がある.

スカラーが複素数, 実数に無関係な事柄を議論するときには, スカラー集合を $\mathbb{K}$ の文字で表す.

行列

行列記号は, 基本的に線形代数学の教科書 [1] に準ずる. ただし, 行列やベクトルを表す括弧は, (,) を用いる.

単位行列は E, 零行列は O の記号を用いる. 行列のサイズが問題になるときは, 添字でそのサイズを表示する. すなわち, n 次正方行列の単位行列は E_n, $m \times n$ 行列の零行列は $O_{m,n}$ 書く. E のスカラー倍 $aE (a \in \mathbb{K})$ をスカラー行列ということがある.

線形代数学で学んだ記号と内容をまとめておく.

- 行列 A の ij 成分が a_{ij} であるとき, $A = (a_{ij})$ と書く.
- ij 成分が 1 で他のすべての成分が 0 の行列を E_{ij} と書くことにする. これを, 行列単位という.
- 行列 A に対して, 転置行列は ${}^tA$ と書く. $A = (a_{ij})$ なら ${}^tA$ の ij 成分は a_{ji}
- 行列 A に対して, A の複素共役は $\overline{A}$ と書く. $A = (a_{ij})$ なら $\overline{A}$ の ij 成分は $\overline{a}_{ji}$
- 正方行列が対角部分が正方行列であるようなブロック分けで, $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ となるとき, この行列を $A \oplus B$ と表記することがある. ブロックの数が 3 つ以上に対しても同様の表記を用いる.
- 行列 A に対して, A の階数 (ランク) を $\operatorname{rank} A$ と書く. 階数は行列の基本変形 (あるいは掃き出し法, または消去法) で計算できる.

- $n \times n$ 行列の単位行列 E_n と行列単位 E_{ij} を用いて,

$$
\begin{aligned}
P_n(i, \lambda) &= E_n + (\lambda - 1)E_{ii} \quad (\lambda \neq 0) \\
Q_n(i, j) &= E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad (i \neq j) \\
R_n(i, j, \lambda) &= E_n + \lambda E_{ij} \quad (i \neq j)
\end{aligned}
$$

  で与えられる行列を, 基本行列という (P, Q, R の記号は一般的なものではないと思う). これが教科書 [1] p. 15 の行列になることは, 各自確かめること.
- 行列の基本変形について: 行基本変形は基本行列を左からかける, 列基本変形は基本行列を右からかけることで, 行列の積で表現できる.
- 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は, 拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ に対して行基本変形 (掃き出し法, 消去法) を利用することにより, 解の存在も込めて計算することができる.
- n 次正方行列 A に対して, A の行列式は, $|A|$ もしくは $\det A$ と書く.
- n 次正方行列 A に対して, A のトレースは, $\operatorname{tr} A$ と書く.
- n 次正方行列に対して, $AB = BA = E_n$ となる行列 B が存在するとき, A は**正則** (あるいは**可逆**) であるという. このとき, $B = A^{-1}$ と書いて, A の逆行列という. 逆行列が存在するための必要十分条件は, $\det A \neq 0$ である.
- A を $m \times n$ 行列, P を m 次正方行列, Q を n 次の正方行列とする. P, Q が正則行列なら, $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(A)$.
- n 次正方行列 A に対して, $\widetilde{A}$ を A の余因子行列とする. $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ とすると, $\widetilde{a}_{ji} = (-1)^{i+j} \det D_{ij}$ で, D_{ij} は A から i 行 j 列を除いてできる $n-1$ 次正方行列である. $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E_n$ が成立する.
- 上の逆行列の公式は数学の理論上は重要であるが, 正方行列 A の具体的な逆行列の計算は, 行列を並べてできる $2n \times n$ 行列 $(A\ E)$ を行基本変形 (掃き出し法) して計算することができる.
- 上の事から, 行列が正則であるための必要十分条件は, それが基本行列の積で書ける事である.

問 1.1
1. 行列の積に関して結合律 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示せ.
2. A を n 次正方行列とする, 任意の n 次正方行列 B に対して $AB = BA$ なら, A はスカラー行列であることを示せ.
3. $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B に対して, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ が成立することを示せ.
4. n 次正方行列 A, B と自然数 k に対して, $\operatorname{tr}((AB)^k) = \operatorname{tr}((BA)^k)$ が成立することを示せ.
5. $\operatorname{rank}(AB) \leqq \max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$ を示せ.
6. $\det AB = \det A \det B$ を示せ.
7. n 次正方行列 A が正則 $\iff \operatorname{rank} A = n$ を示せ.
8. $\det {}^tA = \det A$ を示せ.
9. n 次正方行列 A が $\det A = 0$ であるとき, O でない n 次正方行列 B で, $AB = O$ となるものが存在することを示せ.
10. ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$ を示せ.

数ベクトル (空間)

この講義では, n 行 1 列の行列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を数ベクトル (あるいは列ベクトル) ということにする．このとき a_i を第 i 成分という.

高校までは, ベクトルの成分は横に並べて $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と書いていたが, 記法上, 列ベクトルの方が便利なので, 通常はこちらを用いる．横に並べたベクトルは, 行ベクトルということにする.

零ベクトルは, 記号 $\boldsymbol{o}$ を用いることにする.

数ベクトル全体の集合を次のように書く.

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{C} \right\}, \qquad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

実数全体は複素数全体の部分集合なので, 自然に (実数を虚数部分が 0 である複素数と見て) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ と考える．スカラーの集合は, $\mathbb{C}^n$ では $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ では $\mathbb{R}$ とする．この節では, ベクトル空間 V と書けば, $\mathbb{C}^n$ または $\mathbb{R}^n$ のいずれか, あるいはその部分空間 (定義 4.4) とし, $\mathbb{K}$ をそれに応じたスカラーの集合とする．$\mathbb{K}^n$ と書けば, $\mathbb{K}$ が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ に応じて, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ のいずれかとする.

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (i \text{ 番目だけ } 1 \text{ で他は } 0), \qquad i = 1, \ldots, n$$

を $\mathbb{K}^n$ の標準基底という.

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 第 j 列だけを取り出してできるベクトルを

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

とするとき, A はこの列ベクトルを横に並べてできる行列と見て,

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$$

と書く事もある．行ベクトルに対しても，同様のことを行う.

この方法で, $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ を $m \times n$ 行列とし, B を $l \times m$ 行列とすると, 次の表記が成立する.

$$BA = (B\boldsymbol{a}_1 \ B\boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ B\boldsymbol{a}_n) \tag{1.1}$$

さらに, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ をベクトルとし, $\boldsymbol{w}_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_{ki}\boldsymbol{v}_k$, $i = 1, \ldots, m$ とすると, 次の表記も行列として成立する.

$$(\boldsymbol{w}_1,\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m) = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_l)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

数ベクトル空間での, 一次独立 (線形独立), 一次従属 (線形従属), 生成する, 部分空間, 基底とかの言葉は, 後で一般的な場合の定義や性質を述べるが, 線形代数学で学習した内容は既知とする.

問 1.2 $\mathbb{K}^n$ の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底になることと, $P = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$ が正則行列であることは同値であることを証明せよ.

ベクトル空間の基底は, 無限に取り方がある. (標準基底以外に) 基底を取り替えることにより, いろいろな性質が見えるようになるという事が重要である.

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であるとき, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^n$ は基底の一次結合として一意的に表示される.

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n, \qquad a_i \in \mathbb{K}$$

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の 2 つの基底であるとする. 上に述べたように, $\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合になる.

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\boldsymbol{v}_j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

このとき, 行列 $P = (p_{ij})$ を基底の変換行列という. 上の式は行列の積を用いると,

$$(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \cdots\ \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P$$

と書ける. 上では, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の一次結合で新しい基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を作っていると見る. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が基底になることと, P が正則行列であることは, 同値である

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^n$ は, $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$, $a_i \in \mathbb{K}$ と一意的に書ける. このとき, 数ベクトル $(a_1, \ldots, a_n)$, あるいは, $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ から決まる $\boldsymbol{a}$ の座標という.

上の様に基底を取り替えた時, 座標がどのように変化するかを計算しておく. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の 2 つの基底であるとし, $P = (p_{ij})$ を上で述べたこれらの変換行列 ($\boldsymbol{u}_i$ を $\boldsymbol{v}_j$ の一次結合で表した時の係数からできる行列) とする. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^n$ の $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対する座標を $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$, $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対する座標を $\boldsymbol{a} = a'_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a'_n\boldsymbol{u}_n$ とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i\boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{n} a'_i\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji}\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji}a'_i\right)\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\boldsymbol{v}_j$$

を得る. 基底に対する係数の一意性から, 次を得る.

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ji}a'_i = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

上の式は, 行列を用いて表すと, 次になる.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

つまり, 正則行列 P を用いて新たな基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ を定めると, 新たな座標は元の基底を用いた座標を列ベクトルと見て, P^{-1} を左からかけることで得られる.

注意 1.1　これまで, 座標というものをあまり意識してこなかったかも知れないが, 座標は a priori[*1] に定まっているのではなく, 人間が定めているのである. その際に, どのように座標を定めたかで, 結果がどれだけずれるかを調べるのは, 常に必要とされることである. この講義では, 直線を利用した座標 (線形という漢字の意味を考えよ) だけを考えるが, 高校や微分積分学ですでに学習した「極座標」も重要な座標系である.

固有値, 固有ベクトル, 行列の対角化

定義 1.1　A を n 次正方行列とする. $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成立するとき, λ を A の固有値, $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に属する固有ベクトルという.

λ が A の固有値であるとき,

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda v\}$$

を固有値 λ の固有空間という. 上の定義において, 一般的には $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であるが, $\lambda \in \mathbb{R}$ なら, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とすることがある.

上で固有空間と書いてあるが, これは $\mathbb{K}^n$ の部分空間になる.

$\{\boldsymbol{o}\}$, $\mathbb{K}^n$ も上の部分空間の定義を満足する. この 2 つは, 自明な部分空間と言われる. 部分空間に関して,「基底」や「次元=基底の個数」が定義できることは, 線形代数学で学習していると想定する.

問 1.3　　1. 上の $V(\lambda)$ は部分空間になることを示せ.

2. λ, μ を A の固有値とするとき, $\lambda \neq \mu$ なら $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{\boldsymbol{o}\}$ となることを示せ.

λ が A の固有値, $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に属する固有ベクトルであるとすると,

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$$

となる. $\det(\lambda E - A) \neq 0$ なら, 両辺に左から $(\lambda E - A)^{-1}$ をかけると, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となって矛盾する. 従って, $\det(\lambda E - A) = 0$ である.

逆に, $\det(\lambda E - A) = 0$ なら, $(\lambda E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ は $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ となる解 (非自明な解) を持つことが, 連立一次方程式の解法からわかる.

定義 1.2　A を n 次正方行列, x を不定元とするとき,

$$\varphi_A(x) = \det(xE - A)$$

を A の特性多項式 (characteristic polynomial) という. これは, x の n 次多項式になる.

[*1] アプリオリと読む.「先験的」という意味のラテン語, 対義語は a posteriori

上の議論から, 固有値は特性多項式の根 (root) であることがわかる．また, 複素数の範囲では特性多項式の根は必ず存在することが証明できるので, 正方行列は, 少なくともひとつの固有値を持つこともわかる．

特性多項式は, 次の特別な性質を持つ．

定理 1.1（Cayley – Hamilton）　n 次正方行列 A の特性多項式を φ_A とすると, $\varphi_A(A) = 0$.

証明. $B(x) = xE_n - A$ とし, $\widetilde{B}(x)$ を $B(x)$ の余因子行列とする．$\widetilde{B}(x)$ の成分は, 余因子の定義から, x の $n-1$ 次以下の多項式である．これを, 行列を係数とする x 多項式とみると, n 次正方行列 $C_0, \ldots, C_{n-1}$ を用いて次のように書ける．

$$\widetilde{B}(x) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1x + C_0$$

余因子行列の決め方から, $(xE_n - A)\widetilde{B}(x) = \widetilde{B}(x)(xE_n - A) = \varphi_A(x)E_n$ が成立する．ひとつめの等号を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned}
&(xE_n - A)(C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_0)\\
&= C_{n-1}x^n + (C_{n-2} - AC_{n-1})x^{n-1} + (C_{n-3} - AC_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (C_0 - AC_1)x - AC_0\\
&= C_{n-1}x^n + (C_{n-2} - C_{n-1}A)x^{n-1} + (C_{n-3} - C_{n-2}A)x^{n-2} + \cdots + (C_0 - C_1A)x - C_0A\\
&= (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_0)(xE_n - A)
\end{aligned}$$

となる．2 行目と 3 行目の等式から $AC_i = C_iA$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ が成立するので, $(xE_n - A)\widetilde{B}(x) = \widetilde{B}(x)(xE_n - A) = \varphi_A(x)E_n$ に $x = A$ を代入する事ができて, $\varphi_A(A)E_n = O$ となる．従って, $\varphi_A(A) = O$.

注意 1.2（**行列を係数とする多項式の変数に行列を代入してはいけない.**）　x を変数とする．$C_m, \ldots, C_0$ を x に依存しない n 次正方行列とする．次の 2 つの表記は, 行列係数の多項式としては同じものである．

$$C_mx^m + C_{m-1}x^{m-1} + \cdots + C_1x + C_0 = x^mC_m + x^{m-1}C_{m-1} + \cdots + xC_1 + C_0$$

しかし, x に行列 A を代入すると, 左辺と右辺では値が異なる．行列の積は, 交換法則が成立しないからである．

$$C_mA^m + C_{m-1}A^{m-1} + \cdots + C_1A + C_0, \qquad A^mC_m + A^{m-1}C_{m-1} + \cdots + AC_1 + C_0$$

これらの 2 つが一致する条件は, $C_kA^k = A^kC_k$, $k = 0, \ldots, m$ が成立するときで, この時に限り x に A を代入するということが意味を持つ．これが成立しない場合は, 多項式の表記を明示する必要がある．

以下, 特性多項式の根を考える必要があるので, スカラーの集合は, $\mathbb{C}$ とする．A を n 次の正方行列とする．A の固有ベクトルからなる基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在すると仮定する．$\boldsymbol{v}_i$ の固有値を λ_i とする．$P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とすると, 問 1.2 よりこれは正則行列になる．さらに $\boldsymbol{v}_i$ が固有ベクトルであることを利用すると, $AP = (A\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ A\boldsymbol{v}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \lambda_n\boldsymbol{v}_n)$ となる．これを (1.1), (1.2) の書き方で書き換えると,

$$A(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

すなわち, 次を得る．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

これを, A の正則行列 P による対角化という.

前節の基底の取り替えという目で見ると, 行列の対角化は, その行列が最も簡単な表示をもつ基底を選び直していることに他ならない.

行列の固有値や対角化は, 様々な応用場面で現れる. 例えば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ と対角化されたとすると, $(P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ を得る. $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ であるので, $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$ となって, A のべき乗の計算が簡単にできる. これ以外にも, 行列の固有値 (あるいは固有値の性質) は, 応用も含めた数学の多くの場面で現れる. ただし, 固有値を厳密の求めるには特性方程式の根の計算が必要で, これは一般的に簡単な事ではない.

問 1.4 $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP,\ k \in \mathbb{Z}$ を示せ.

問 1.5（冪等行列） n 次正方行列 P は, $P^2 = P$ を満たすとき, 冪等行列という. 冪等行列の固有値は, 1 と 0 で, この行列は対角化可能であることを示せ.

正方行列 A に対して, $I_A = \{f(x) \mid f(x)\ \text{は}\ x\ \text{の多項式}, f(A) = O\}$ と置く. Cayley – Hamilton の定理から, $I_A \neq \{0\}$ である. $m_A(x)$ を I_A の 0 でない次数最小の多項式で最高次の係数が 1 となるものとする. これは一意的である.

実際, $m'(x)$ を $m'(A) = O$ となる 0 でない x の多項式で最高次の係数が 1 の別の多項式とする. これを $m_A(x)$ で割り算すると,

$$m'(x) = m_A(x)q(x) + r(x)$$

となる. ここで, $r(x)$ は割り算で生じる余りで, 割り算の定義から $r(x)$ の次数は, $m_A(x)$ の次数より小さい. 両辺の x に A を代入すると $r(A) = 0$ となるが, $m_A(x)$ の次数の最小性から, $r(x) = 0$ である. $m'(x)$ と $m_A(x)$ の次数は, やはり次数の最小性から一致するから, $q(x)$ は定数である. 両辺の最高次の係数を比較して, $q(x) = 1$ を得る. 従って, $m'(x) = m_A(x)$ である.

定義 1.3（最小多項式） A を n 次正方行列とし, $A \neq O$ とする. このとき, 上で定まる $m_A(x)$ を A の最小多項式という.

問 1.6 A を n 次正方行列とする.

1. P を正則行列とするとき, A の最小多項式と $P^{-1}AP$ の最小多項式は一致することを示せ.
2. A が対角化できるとし, A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき, A の最小多項式を求めよ.

Jordan 標準形

上の固有値による対角化は, 全ての行列で可能なわけではない. 例えば, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の特性多項式は, x^2 であり, その根は 0 だけである. しかし, 固有値 0 に対応する固有ベクトルは, $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ だけであり, 固有ベクトルで $\mathbb{K}^2$ の基底を作ることができない.

上で述べたように, 対角行列に近ければ行列計算はやさしくなる. 対角行列にできる限り近い形としてよく利用されるのが, 表題に挙げた Jordan 標準形である.

A を n 次正方行列とし, λ を A の特性多項式の根とする.

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid \text{自然数 } k \text{ が存在して } (A - \lambda E)^k \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\}$$

を λ に対する一般化された固有空間という.

問 1.7　一般化された固有空間は部分空間になることを示せ.

$\lambda \in \mathbb{C}$ とする. 次の形の m 次正方行列を Jordan 細胞という.

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

問 1.8　　1. $J(\lambda, m)^n$, $n \in \mathbb{N}$ を計算せよ.

2. n 次正方行列 A が $A^n = O$, $A^{n-1} \neq O$ を満たす時, $A = J(0, n)$ と行列表示されるような基底を構成せよ.

定理 1.2　n 次の複素正方行列 A に対して, 正則行列 P が存在して,

$$P^{-1}AP = J(\lambda_1, m_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_k, m_k)$$

となる. ここで, 複素数, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は A の特性多項式 $\varphi_A(x) = \det(xE_n - A)$ の根であり, $m_1, \ldots, m_k$ は, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ を満たす自然数である.

上の定理の証明は, ここでは省略する. 方針としては, $\mathbb{C}^n$ を一般化された固有空間の直和に分解し, 各直和成分ごとに問 1.8 2. の考察をすることでなされる. 後期の代数学序論演習 II で, 単因子論を用いた証明を与える予定である.

内積

数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の (標準) 内積を次で定義する.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \overline{a}_1 b_1 + \overline{a}_2 b_2 + \cdots + \overline{a}_n b_n$$

この講義では, 内積の記号は (,) を用いることにする. 内積の定義では, 共役複素数を前の $\boldsymbol{a}$ でとるか, 後ろの $\boldsymbol{b}$ でとるかは, 2 つの流儀が混在している. この講義では前の方にするが, 書籍によっては後にするものも多くあり (例えば, [2],[3],[4] は全て後), 読む時には注意が必要である.

ベクトルの大きさ (あるいは長さ, ノルム) は, 自身との内積の平方根で定義される.

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}, \quad \boldsymbol{v} \in V$$

ベクトルの大きさは, $||\boldsymbol{v}||$ のように 2 重の $||$ を用いて表すことも多い.

$\mathbb{R}^n$ と上の内積 (あるいはそれから定まる長さ) を共に考えるとき, n 次元の **Euclid 空間**という.

問 1.9　次を示せ.

1. $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}^2|) + \dfrac{i}{2}(|\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}|^2)$
   特に, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ なら, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}^2|)$
2. $|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|$　(Cauchy–Schwarz の不等式)
3. $||\boldsymbol{v}| - |\boldsymbol{w}|| \leqq |\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}| \leqq |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|$　(3 角不等式)
4. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, これらのなす角を θ とするとき, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta$ が成立することを示せ.

$\mathbb{K}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ を満たすとき, 正規直交基底という. 標準基底は標準内積において正規直交基底である. 後の講義では, そうでない正規直交基底も考えるし, 標準でない内積も考える.

基底が与えられると, Gram–Schmidt の直交化により正規直交基底が得られることは, 既知とする. 正規直交基底を用いた座標系では, 座標の成分の値が基底との内積で計算できることは重要である. すなわち, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を正規直交基底とすると, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^n$ に対して, 次が成立する.

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \Longleftrightarrow a_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_i)$$

問 1.10（Gram 行列）　$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ をベクトルとするとき, これらから作られる $m \times m$ 行列 $G = ((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j))$ (ij 成分が内積 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ である行列) を Gram 行列, $\det G$ を Gram 行列式という. 次の問に答えよ.

1. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立である必要十分条件は, $\det G \neq 0$ であることであることを示せ.
2. $m = n$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{C}^n$ として, $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ とするとき, $\det G = |\det A|^2$ を示せ.

W を $\mathbb{K}^n$ の部分空間とする.

$$W^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in W\}$$

とおくと, $W^\perp$ も部分空間になり, $\mathbb{K}^n = W \oplus W^\perp$ となる. $W^\perp$ を W の直交補空間という.

問 1.11　1. $(W^{\perp})^{\perp} = W$ を示せ.

2. 上の $V = W \oplus W^{\perp}$ を証明せよ.

2　実対称行列の直交行列による対角化

ここまでは, 内積に関係のない「対角化」を考えたが, 内積を利用した対角化を考える. 内積は, 実数と複素数で性質が異なるので, 結果も性質に応じてずれる. まずは, 実数の場合を扱う.

定義 2.1　1. $n \times n$ 行列 A は, ${}^tA = A$ が成立するとき対称行列という.

2. $n \times n$ 行列 A は, ${}^tA = -A$ が成立するとき交代行列 (または反対称行列) という.

問 2.1　1. 任意の n 次正方行列 A に対して,

$$A = B + C, \quad {}^tB = B,\ {}^tC = -C$$

の形の和に一意的に書けることを示せ.

2. 正則な対称行列の逆行列も対称行列になることを示せ.

3. 対称行列 A, B に対して, $A \cdot B = \dfrac{AB + BA}{2}$ と定義すると[*2], $A \cdot B$ も対称行列になり, $A \cdot A = A^2$, $A \cdot B = B \cdot A$, $A^2 \cdot (A \cdot B) = A \cdot (A^2 \cdot B)$ が成立することを示せ.

4. A の n 次の実行列とする. 任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w})$ が成立することと A が実対称行列であることは同値であることを示せ.

定理 2.1　実対称行列の固有値は実数である.

証明. A を n 次実対称行列, $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ を固有値 λ に対する固有ベクトルとする. 上の問の 4. を用いると,

$$\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

を得るから, $(\lambda - \overline{\lambda})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ なので, $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ となり, $\lambda \in \mathbb{R}$.

問 2.2　実交代行列の固有値は純虚数, すなわち bi, $b \in \mathbb{R}$ の形であることを示せ.

定理 2.2　A を n 次実対称行列とするとき, 異なる固有地に属する固有ベクトルは互いに直交する.

証明. λ, $\mu \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれに対する固有ベクトルとする. このとき,

$$\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}) = \mu(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

となる. これより, $(\lambda - \mu)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ となるので, $\lambda - \mu \neq 0$ なら, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$.

定義 2.2　正方行列 A は, ${}^tAA = E$ が成立するとき, **直交行列**と言う. 行列成分に応じて, 実直交行列, 複素直交行列という.

[*2] $A \cdot B$ を対称行列 A, B の Jordan 積という. この Jordan は Jordan 標準形の Jordan とは別人の物理学者, 物理の人はヨルダンと読み数学の人はジョルダンと読んでいる

問 2.3　1. A を n 次の実正方行列とする．任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ が成立するための必要十分条件は, A が実直交行列であることを示せ.

2. ${}^tAA = E$ なら $A\,{}^tA = E$ が成立する事を示せ.
3. A, B が直交行列なら, A^{-1}, AB も直交行列であることを示せ (直交行列全体は, 積に関して群をなす).
4. 直交行列の行列式の値は, ± 1 を示せ.
5. 2 次の直交行列は, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ もしくは, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の形をしていることを示せ.
6. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点を中心に反時計回りに角 θ だけ回転した位置にあることを示せ.
7. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は原点を通る直線 $y = (\tan\dfrac{\theta}{2})x$ に関して対称な位置にあることを示せ.

定理 2.3　実対称行列は直交行列で対角化可能である．すなわち, A を実対称行列とすると, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在する．逆に, 直交行列で対角化可能な行列は, 対称行列である.

証明. A を n 次の実対称行列とし, n に関する帰納法で証明する.

$n = 1$ の場合は, 明らかである.

$n - 1$ まで成立すると仮定する．$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし, $\boldsymbol{p}_1$ を λ_1 に属する大きさ 1 の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を $\boldsymbol{p}_1$ を拡張してできる $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする．このとき, 行列 $P' = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)$ は直交行列になる．$i = 2, \ldots, n$ に対して,

$$A\boldsymbol{p}_i = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\boldsymbol{p}_k$$

とする．このとき, A が実対称行列であることと, $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ の正規直交性を利用すると, $j = 2, \ldots, n$ に対して, 次が成立する.

$$\begin{aligned} a'_{1j} &= (\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{p}_j) = (A\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_j) = (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_j) = 0 \\ a'_{j1} &= (\boldsymbol{p}_j, A\boldsymbol{p}_1) = (\boldsymbol{p}_j, \lambda\boldsymbol{p}_1) = 0 \end{aligned}$$

上のことから, 次が成立する.

$${}^tP'AP' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A' \end{pmatrix} \qquad A' = (a'_{ij}),\ i, j = 2, \ldots, n$$

${}^tPAP'$ も実対称行列なので, A' は $n - 1$ 次の実対称行列になる．帰納法の仮定から, $n - 1$ 次と実直交行列 P'' が存在して, ${}^tP''A'P''$ は対角行列になる.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & P'' \end{pmatrix} P'$$

とおくと, P は実直交行列になり, ${}^tPAP$ は対角行列になる.

直交行列 P によって ${}^tPAP = D$ が対角行列であるとする．このとき, ${}^tD = D$ で $A = PD{}^tP$ であり, ${}^tA = (P{}^tD{}^tP) = PD{}^tP = A$.

問 2.4　次の実対称行列を, 直交行列により対角化せよ.

$$(1)\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\quad (2)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad (3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad (4)\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$(5)\begin{pmatrix}3 & -\sqrt{3} & -2\\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3}\\ -2 & -2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\quad (6)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

問 2.5　1. $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ を実係数の多項式とする. $\theta \in \mathbb{C}$ が $f(\theta) = 0$ を満たすなら, その共役複素数 $\overline{\theta}$ も $f(\overline{\theta}) = 0$ を満たすことを示せ.

2. $\lambda \in \mathbb{C}$ を直交行列の固有値とすると, $|\lambda| = 1$ であることを示せ.
3. A が奇数次の直交行列で $\det A = 1$ なら, A は 1 を固有値に保つことを示せ.
4. A が 3 次の直交行列で $\det A = 1$ とする. このとき, 行列式の値が 1 の直交行列 B をうまく選べば,
$${}^tBAB = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ とできることを示せ.

注意 2.1　上の問の 3., 4. は, 行列式 1 の 3 次の直交行列は, 固有値 1 の固有ベクトルが定める直線の周りの回転を表すことを意味する. この逆も成立し, 3 次元空間の回転は, 行列式 1 の直交行列による積で与えられる. この事実は, ロボットの設計や, ゲームプログラムなどに幅広く応用されている.

A を n 次実対称行列, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を A の固有値とする. $V(\lambda_i)$ を λ_i に対する $\mathbb{R}^n$ の固有空間とする. $\boldsymbol{v}(\lambda_i)_1, \ldots, \boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i}$ を $V(\lambda_i)$ の正規直交基底とし, $P_{\lambda_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次で定義する.

$$P_{\lambda_i}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}(\lambda_i)_1)\boldsymbol{v}(\lambda_i)_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}(\lambda_i)_2)\boldsymbol{v}(\lambda_i)_2 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i})\boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i}$$

上の定義から, $\mathrm{Im}(P_{\lambda_i}) \subseteq V(\lambda_i)$ である. P_{λ_i} は固有空間 $V(\lambda_i)$ への射影と呼ばれる. この射影を用いると, 行列 A を線形変換 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と見ると, 線形変換として次が成立する.

$$A = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + \cdots + \lambda_k P_{\lambda_k}$$

これを, 実対称線形変換 A のスペクトル分解 (Spectral decomposition) といい, 固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を A のスペクトルという.

問 2.6　次を示せ.

1. $P_{\lambda_i} : \mathbb{R}^n \to V(\lambda_i)$ は全射である.
2. $P_{\lambda_i}^2 = P_{\lambda_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき, $P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}P_{\lambda_i} = 0$ (ここで, 積は写像の合成の意味. 0 は 0 写像, 全ての元を $\boldsymbol{o}$ に写す写像.).
3. $P_{\lambda_1} + \cdots + P_{\lambda_k} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$

実 2 次形式と Sylvester の慣性則

A を n 次の実対称行列とする. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $A[\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v})$ と定義して, A に付随する 2 次形式という. $A = (a_{ij})$ とし, 座標 $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ を用いると, $A[\boldsymbol{v}]$ は x_i の斉次 2 次式となる.

$$A[\boldsymbol{v}] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

定義 2.3 1. 実対称行列 A が正値であるとは, 任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $A[\boldsymbol{v}] \geqq 0$ が成立することをいう.

2. 実対称行列 A は, A が正値であり, $A[\boldsymbol{v}] = 0$ となるのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ のときに限るとき, 正の定値 (あるいは正定値, positive definite) であるという.
3. 実対称行列 A は, $-A$ が正定値であるとき, 負の定値 (negative definite) であるという.
4. 実対称行列 A は, 正定値でも負の定値でもなく, $\det A \neq 0$ のとき不定値 (indefinite) であるという.

問 2.7 1. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ として, $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_m)$ とする. このとき, $B = {}^tAA$ は, 正値対称行列になり, B が正定値である必要十分条件は, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であることを示せ.

2. P を正則な n 次の正方行列, A を n 次の対称行列とするとき, A が正値 (正定値) である必要十分条件は, ${}^tPAP$ が正値 (正定値) である事を示せ.

定理 2.4 $A = (a_{ij})$ を n 次の実対称行列とする. 次の 1 から 4 は同値である.

1. A は正定値である.
2. A の固有値は全て正.
3. 任意の $1 \leqq i_i < i_2 < \cdots < i_k \leqq n$ に対して, これから定義される次の主小行列式は正. すなわち,

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_1i_2} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1i_k} & a_{i_2i_k} & \ldots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix} > 0$$

4. 任意の $1 \leqq k \leqq n$ に対して, 上で $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_k = k$ としたときの主小行列式は正. すなわち,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

証明. $1 \Rightarrow 2$. λ を A の固有値, $\boldsymbol{v}$ を A の λ に対する固有ベクトルとするとき, $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = A[\boldsymbol{v}]$ なので, $A[\boldsymbol{v}] > 0$ なら $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ より $\lambda > 0$.

$2 \Rightarrow 1$. λ_i, $i = 1, \ldots, n$ を A の固有値とし, $\boldsymbol{v}_i$ を固有値 λ_i に属する固有ベクトルで, これらが正規直交基底になるように取る. この時, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{v}_i$ の一次結合で書けるので, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ が存在して, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ となる. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が正規直交基底であることを利用すると,

$$A[\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_1\boldsymbol{v}_1, A\sum_{i=1}^{n} c_1\boldsymbol{v}_1\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_1\boldsymbol{v}_1, \sum_{i=1}^{n} c_1\lambda_i\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2$$

を得る．よって, 全ての i に対して $\lambda_i > 0$ なら, A は正定値である．

$1 \Rightarrow 3.$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \dots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_1i_2} & a_{i_2i_2} & \dots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1i_k} & a_{i_2i_k} & \dots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}, \quad V_{i_1i_2\dots i_k} = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \text{ なら } a_j = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

とする．$V_{i_1i_2\dots i_n}$ は $\mathbb{R}^k$ と同一視できるベクトル空間で, 対称行列 A' は $V_{i_1\dots i_k}$ 上の 2 次形式を定める．A', $V_{i_1\dots i_k}$ の決め方から, 任意の $\boldsymbol{v}' \in V_{i_1\dots i_k}$ に対して, $A'[\boldsymbol{v}'] = A[\boldsymbol{v}']$ となる．A が正定値なので, A' は $V_{i_1\dots i_k}$ 上正定値な 2 次形式になる．上で示したことから, A' の固有値は全て正である．よって, それらの積も正となり, $\det A' > 0$.

$3 \Rightarrow 4.$ 4. は 3. の特別の場合なので, 明らか.

$4 \Rightarrow 1.$ n に関する機能法を用いる．$n = 1$ の時は明らかであり, $n-1$ まで主張が成立していると仮定する．$A = (a_{ij})$ を次のようにブロックに分ける．

$$A = \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{a} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$$

このとき帰納法の仮定から A' は正定値であり, $\det A' > 0$ である．A'^{-1} も対称行列になること (問 2.1 2.) を利用すると, 簡単な計算により, 次が成立する．

$$A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \boldsymbol{o} \\ {}^t(A'^{-1}\boldsymbol{a}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{o} \\ {}^t\boldsymbol{o} & a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & A'^{-1}\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix}$$

この式の両辺の行列式を計算すると, $\det \begin{pmatrix} E_{n-1} & \boldsymbol{o} \\ {}^t(A'^{-1}\boldsymbol{a}) & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & A'^{-1}\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix} = 1$ より,

$$\det A = \det A'(a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a})$$

を得る．仮定より $\det A > 0$, $\det A' > 0$ なので, $a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a} >$ を得る．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} A[\boldsymbol{x}] &= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}' & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & \boldsymbol{o} \\ {}^t(A'^{-1}\boldsymbol{a}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{o} \\ {}^t\boldsymbol{o} & a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & A'^{-1}\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}' + x_n{}^t(A'^{-1}\boldsymbol{a}) & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{o} \\ {}^t\boldsymbol{o} & a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' + x_nA'^{-1} \\ x_n\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \\ &= A'[\boldsymbol{x}' + x_nA'^{-1}\boldsymbol{a}] + (a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a})x_n^2 \end{aligned}$$

ここで, A' が正定値であることと $a_{nn} - {}^t\boldsymbol{a}A'^{-1}\boldsymbol{a} > 0$ より, 任意の $\boldsymbol{x}$ に対して, $A[\boldsymbol{x}] \geqq 0$ を得る．等号成立は, $x_n = 0$ かつ $\boldsymbol{x}' + x_nA'^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ となるが, このとき, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となるので, A は正定値である．

注意 2.2　上の定理で, 1 の正定値の文言を正値に変更し (定の文字を無くす), 2, 3, 4 の正の文言をを非負に変更すると, 1, 2, 3 は同値な条件となるが, 条件 4 だけ同値でなくなる．実際, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ は正値ではないが, 変更した条件 4 を満たす.

問 2.8　上の注意で述べた, 定理の 1–3 が正値と非負に置き換えても同地になることを証明するひとつの方法.

1. t を不定元とし,

   $$f(t) = (t+x_1)(t+x_2)\cdots(t+x_n) = t^n + e_1(x_1,\dots,x_n)t^{n-1} + \cdots + e_{n-1}(x_1,\dots,x_n)t + e_n(x_1,\dots,x_n)$$

   とする. $e_i(x_1,\dots,x_n)$ を i 次の基本対称式という. $f(t)$ の $t \geqq 0$ での値を考えることにより,

   $$e_1(x_1,\dots,x_n) \geqq 0, \dots, e_n(x_1,\dots x_n) \geqq 0$$

   が成立すれば, $x_1 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0$ が成立することを示せ.
2. $A = (a_{ij})$ を n 次対称行列とし, $\varphi_A(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ を A の特性多項式とする. この時次が成立することを示せ.

   $$c_k = (-1)^k \sum_{i_1<\cdots<i_k} \det \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1i_k} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$$
3. 上の 1, 2 を利用して, 定理 2.4 の 2, 3 において,「正」を「非負」に置き換えて, 3 を仮定して 2 を証明せよ.

問 2.9　1. A が正定値実対称行列なら, A^{-1} も正定値実対称行列になることを示せ.
2. A が正定値実対称行列なら, $A^2 - A + E$ も正定値実対称行列になることを示せ.

A を実対称行列とし, A の固有値を大きい順に $\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} \geqq \cdots \geqq \lambda_{p+q}$ とする. すなわち, A は, 正の固有値を (重複を込めて)p 個, 負の固有値を (重複を込めて)q 個, 0 固有値の重複度が $n-p-q$ であるとする. 上の対角化可能性の証明から, 対角化したときの固有値の順は自由に選べる. すなわち, 直交行列 P が存在して, 次の形にできる.

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_p &&&&&& \\ &&& \lambda_{p+1} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_{p+q} &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

ここで,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} &&&&&& \\ &&& \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$${}^tT{}^tPAPT = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

となる．この式は, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ としたとき, $A[PT\boldsymbol{x}] = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ となることを示している．すなわち, $\mathbb{R}^n$ の基底をうまく取り替えて座標変換をすることにより, 2 次形式は上の簡単な形まで変形できるのである．上では, $PT\boldsymbol{x} = x_1PT\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_nPT\boldsymbol{e}_n$ なので, 基底 $\{PT\boldsymbol{e}_1, \ldots, PT\boldsymbol{e}_n\}$ に対する座標が, $(x_1, \ldots, x_n)$ の時, $A[\boldsymbol{x}] = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ となることを示している．

定理 2.5（Sylvester の慣性法則）　$A[\boldsymbol{x}]$ を $\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式とすると, $\mathbb{R}^n$ の適当な座標変換をすると, $A[\boldsymbol{x}] = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ の形にできる．このとき, p, q は座標変換の取り方によらず, A から一意的に定まる．

定義 2.4　上の定理から定まる (p, q) を 2 次形式 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号 (signature) という．

定理 2.5 の証明. 前半部分は上に述べた通りなので, (p, q) が一意的に定まることを示せば良い．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と正則な行列 P, P' に対して,

$$\begin{aligned} A[P\boldsymbol{x}] &= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \\ A[P'\boldsymbol{x}] &= x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2 \end{aligned}$$

となったとする．P, P' が正則行列なので,

$$p + q = \mathrm{rank}({}^tPAP) = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}({}^tP'AP') = p' + q'$$

となり, $p + q = p' + q'$ が成立する．$p > p'$ と仮定して矛盾を導く．$P^{-1} = (b_{ij})$, $P'^{-1} = (c_{ij})$ とする．

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ を次の連立方程式の非自明な ($\boldsymbol{o}$ でない) 解とする.

$$\begin{cases} b_{p+1\,1}y_1 + \cdots + b_{p+1\,n}y_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n = 0 \\ c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_{p'1}y_1 + \cdots + c_{p'n}y_n = 0 \end{cases}$$

$p > p'$ を仮定しているので, 方程式の個数は $n - p + p' < n$ となり, 非自明な解は存在する. $\boldsymbol{y}$ の取り方から,

$$\boldsymbol{u} = P^{-1}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = P'^{-1}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{p'+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

とすると, 次が成立する.

$$A[\boldsymbol{y}] = A[P(P^{-1}\boldsymbol{y})] = A[P\boldsymbol{u}] = u_1^2 + \cdots + u_p^2$$
$$A[\boldsymbol{y}] = A[P'(P'^{-1}\boldsymbol{y})] = A[P'\boldsymbol{v}] = -v_{p'+1}^2 - \cdots - v_{p'+q'}^2$$

上の 2 つの式が一致するためには, $u_1 = \cdots = u_p = v_{p'+1} = \cdots = v_{p'+q'} = 0$ となるが, $u_1 = \cdots = u_p = 0$ から $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ となり, $\boldsymbol{y}$ の取り方に矛盾する. よって, $p = p'$ であり, $q = q'$ である.

問 2.10　次の 2 次形式の符号を求めよ.

1. n 変数の 2 次の基本対称式 $\displaystyle\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j$
2. $X = (x_{ij})$ を n 次正方行列とした時, n^2 個の変数 x_{ij} に対して, $\mathrm{tr}(X^2)$ で定義される 2 次形式.

問 2.11　A を実対称行列とし, $A[\boldsymbol{x}]$ が正定値 2 次形式であるとする. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ を利用して, 次の式を示せ.

$$\int\!\!\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{A[\boldsymbol{x}]}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\sqrt{\det A}}$$

Hint: 一般に, $\mathbb{R}^n$ の領域 D と, D から別の領域 $\varphi(D)$ への微分可能な 1 対 1 写像 $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_n(\boldsymbol{x}))$ に対して, $y_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$ とおくと, 次の積分の変数変換公式 (置換積分) が成立する (この式の証明は不要.).

$$\int\!\!\int\cdots\int_D f(\varphi_1(\boldsymbol{x})), \ldots, \varphi_n(\boldsymbol{x})) \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int\!\!\int\cdots\int_{\varphi(D)} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

ここで, $\left|\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| = |\det\left(\dfrac{\partial \varphi_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)|$ は Jacobian (Jacobi 行列の行列式の絶対値). Sylvester の慣性則の証明に用いた対角化の変数変換を利用すれば, 上の積分は計算できる.

注意 2.3　A を正定値対称行列とする．問 2.9 より, A^{-1} も正定値対称行列になる．$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}, A) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A}} \, e^{-\frac{A^{-1}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})]}{2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

で定義される関数は, 多変量正規分布の密度関数と呼ばれる．上の問から, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}, A) dx_1 \cdots dx_n = 1$ である (多重積分は, 積分変数が多すぎると, 数式が煩雑になるので $\int$ 記号は 1 つで書く)．確率変数 $X_i(\boldsymbol{x}) = x_i$ に対して, m_i は X_i の平均 (期待値) になり, $A = (\sigma_{ij})$ とすると, σ_{ii} は X_i の分散, σ_{ij} $(i \neq j)$ は X_i と X_j の共分散になることが計算でわかる (おそらく, 3 年次の確率統計学で講義されると思うが, 興味のある人は計算してみてください．平均, 分散の計算は易しいが, 共分散の計算はうまくやらないと大変.).

2.1　応用 1: n 変数関数の極値問題

$f(x_1, \ldots, x_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の点 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ の近傍で 2 階微分可能で, 全ての 2 次の偏導関数が連続であるとする．この時, 次の Taylor の定理が成立する．

定理 2.6（Taylor の定理）　$h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$ に対して, $0 < \theta < 1$ となる θ が存在して次が成立する．

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) h_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2, \ldots, a_n + \theta h_n) h_i h_j \end{aligned}$$

問 2.12　上の定理を証明せよ．

f はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数なので, 変数はベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ だと考える．行ベクトル $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ と Hesse 行列 $H(f)(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right)$ を用いると, 上の Taylor の定理は次のように行列の積を用いて書ける．

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{h} + \frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{h} (H(f)(\boldsymbol{a} + \theta \boldsymbol{h})) \boldsymbol{h}$$

ここで, 2 次の導関数が連続である事を仮定しているので, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ が成立し, $H(f)(\boldsymbol{x})$ は対称行列である．f の極値問題を考える．1 変数の場合と同様に次の定理が成立する．

定理 2.7　f が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ で極大もしくは極小なら, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

問 2.13　上の定理を証明せよ．

$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$ が成立する点を**停留点**という．

定義 2.5　f を 2 階連続微分可能な関数とする．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ が f の停留点であるとする．Hesse 行列が正則であるとき, $\boldsymbol{a}$ を非退化な停留点といい, Hesse 行列が正則でないとき, $\boldsymbol{a}$ を退化する停留点という．

停留点では, 上の Taylor の定理は次の形になる．

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{h}(H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}))\boldsymbol{h}=f(\boldsymbol{a})+H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h}]$$

従って, $\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{o}$ に近いとき, 常に ${}^t\boldsymbol{h}(H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}))\boldsymbol{h}>0$ なら, f は $\boldsymbol{a}$ で極小, 常に ${}^t\boldsymbol{h}(H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}))\boldsymbol{h}<0$ なら極大となる．

ここで, 連続関数に対する次の性質を利用する．

補題 2.1　$g(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続で $f(\boldsymbol{a})>0$ (resp. $f(\boldsymbol{a})<0$) なら, $\delta>$ が存在して, $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}|<\delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{a}$ の近傍の任意の $\boldsymbol{y}$) に対して, $f(\boldsymbol{y})>0$ (resp. $f(\boldsymbol{y})<0$).

問 2.14　上の補題を証明せよ．

命題 2.1　$h_{11}(\boldsymbol{x}), h_{12}(\boldsymbol{x}),\dots,h_{22}(\boldsymbol{x}), h_{23}(\boldsymbol{x}),\dots,h_{nn}(\boldsymbol{x})$ を $\mathbb{R}^n$ で定義された $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の連続関数とし, これらから対称行列

$$H(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} h_{11}(\boldsymbol{x}) & h_{12}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{1n}(\boldsymbol{x}) \\ h_{12}(\boldsymbol{x}) & h_{22}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{2n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n}(\boldsymbol{x}) & h_{2n}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{nn}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

を考える．$H(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で正定値なら, $\boldsymbol{a}$ の近傍で正定値である．

証明. n 個の小行列式,

$$\det\begin{pmatrix} h_{11}(\boldsymbol{x}) & h_{12}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{1k}(\boldsymbol{x}) \\ h_{12}(\boldsymbol{x}) & h_{22}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{2k}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1k}(\boldsymbol{x}) & h_{kn}(\boldsymbol{x}) & \dots & h_{kk}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},\quad k=1,\dots,n$$

は $\boldsymbol{x}$ の連続関数になることに注意する．$H(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で正定置なら, これら n 個の行列式は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で正であり, 上の補題から, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ の近傍で正である．よって, $H(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ の近傍で正定置になる．

上の 2 次形式の議論から次が成立する．

定理 2.8　n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で非退化な停留点であるとする．このとき,

1. $H(f)(\boldsymbol{a})$ が正定値の 2 次形式を定めれば $f(\boldsymbol{a})$ は極小値.
2. $H(f)(\boldsymbol{a})$ が負の定値の 2 次形式を定めれば $f(\boldsymbol{a})$ は極大値.
3. $H(f)(\boldsymbol{a})$ が不定値の 2 次形式を定めれば $f(\boldsymbol{a})$ は極大でも極小でもない (ある方向で見ると極大だけど, 別の方向では極小になる．鞍点 (saddle point) と呼ばれる).

証明. f の 2 次の導関数が, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続なら, $H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h}]$ は $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{o}$ で連続関数になることに注意する．

$H(f)(\boldsymbol{a})$ が正定値であるとする．このとき, $\boldsymbol{a}$ の近傍 ($|\theta\boldsymbol{h}|$ の値が 0 に近い場所) で, $H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$ も正定値である．よってこの近傍で, $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{o}$ に対して, $H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h}]>0$ となるので,

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h}]>f(\boldsymbol{a})$$

となり, $f(\boldsymbol{a})$ は極小値である.

$H(f)(\boldsymbol{a})$ が負の定値の時も上と同じ議論で, $f(\boldsymbol{a})$ は極大値になる.

$H(f)(\boldsymbol{a})$ が不定値の時を考える. この時, $H(f)(\boldsymbol{a})$ は, 正負両方の固有値を持つ. $\boldsymbol{h}$ を負の固有値に対する固有ベクトルとすると, $H(f)(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{h}] < 0$ である. よって連続性より, $|\theta\boldsymbol{h}|$ が小さければ, $H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h}] < 0$ となり, $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) < f(\boldsymbol{a})$ となる. 同じ議論で, $\boldsymbol{h}'$ を正の固有値に対する固有ベクトルとすると, $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}') > f(\boldsymbol{a})$ となるので, $f(\boldsymbol{a})$ は極小値でも極大値でもない.

問 2.15　$f(x,y,z) = 2x + 4y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz$ の極値を求めよ.

退化する停留点では, 極大, 極小, どちらでもないの全ての場合が起こりうる. 特異点理論では, 退化する停留点は面白い実例を与えることが知られている.

2.2　応用 2: 2 次曲線

xy–平面 (ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$) において, 次の方程式が定める曲線を 2 次曲線という. この節では, $\mathbb{R}^2$ の原点を O と書くことにする.

$$C: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + d = 0, \quad ただし, a,\, b,\, c \in \mathbb{R},\ abc \neq 0 \tag{2.1}$$

例えば, $a, c > 0$, $b = p = q = 0$, $d < 0$ の場合は楕円の方程式になり, $a = b = q = d = 0$, $cp \neq 0$ のときには放物線, $ac < 0$, $b = p = q = 0$, $d \neq 0$ の時には双曲線になることは, 高校で学んだと想定する. これら以外にも, 空集合 ($x^2 + y^2 + 1 = 0$) の場合や 1 点 ($x^2 + y^2 = 0$), 2 点 ($x^2 - 1 = 0$), 2 直線 ($x^2 - y^2 = 0$), 1 直線 ($x^2 + 2xy + y^2 = 0$) などが現れる. ここでは, 2 次曲線の分類を与える.

このような分類問題を考える際には, **同じ**という言葉をきちんと定義する必要がある. ここでは, 合同変換で移り合う図形は同じであるという事を考える.

ところで, 合同変換であるが, それは次のように定義される.

定義 2.6　ユークリッド空間の変換 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が合同変換であるとは, T が 2 点を結ぶ線分の長さを変えない写像であることを言う. すなわち, 任意の P, Q $\in \mathbb{R}^n$ に対して, $|\overrightarrow{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})}| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が成立する変換である.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ とする. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $t_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $t_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ で定めると, これは, 合同変換になる. これを平行移動という. 平行移動は, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ のとき, 原点を動かす.

原点を動かさない合同変換については, 次が成立する.

定理 2.9　$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を長さを保つ変換で, $T(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$ を満たすなら, n 次の直交行列 R が存在して, $T(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{x}$ (行列の積) で与えられる線形写像である.

証明. A, B を座標平面内の 2 点とし, O, A, B は一直線上には無いとする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{y}$ とする. $T(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{\mathrm{O}T(\mathrm{A})}$, $T(\boldsymbol{y}) = \overrightarrow{\mathrm{O}T(\mathrm{B})}$ である. T は長さを変えないので, 3 角形 OAB と OT(A)T(B) は合同な 3 角形になる. よって, $|\boldsymbol{x}| = |T(\boldsymbol{x})|$, $|\boldsymbol{y}| = |T(\boldsymbol{y})|$ で, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角と $T(\boldsymbol{x})$, $T(\boldsymbol{y})$ のなす角は一致し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y}))$ である. O, A, B が一直線上にある場合も, 同様の考察ができるので,

$$(T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ.

このとき, T は線形写像になることを示す. $a, b \in \mathbb{R}$ として上の内積の不変性を利用すると,

$$\begin{aligned}
&|T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})-aT(\boldsymbol{x})-bT(\boldsymbol{y})|^2 \\
&=(T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})-aT(\boldsymbol{x})-bT(\boldsymbol{y}),\ T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})-aT(\boldsymbol{x})-bT(\boldsymbol{y})) \\
&=|T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})|^2+a^2|T(\boldsymbol{x})|^2+b^2|T(\boldsymbol{y})|^2-2a(T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}),T(\boldsymbol{x})) \\
&\qquad -2b(T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}),T(\boldsymbol{y}))+2ab(T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y})) \\
&=|a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}|^2+a^2|\boldsymbol{x}|^2+b^2|\boldsymbol{y}|^2-2a(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-2b(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})+2ab(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0
\end{aligned}$$

となる. 従って, $T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=aT(\boldsymbol{x})+bT(\boldsymbol{y})$ となり, 特に T は線形写像である. $\mathbb{R}^n$ の線形写像は行列の積で与えらえるので, ある行列 R が存在して, $T(\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{x}$ となる. このとき, $(T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{u}))=(R\boldsymbol{x},R\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ で成立するので, R は直交行列である.

$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を合同変換とし, $T(\mathrm{O})=\mathrm{A}$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}$ とすると, $t_{-\boldsymbol{a}}\circ T(\mathrm{O})=\mathrm{O}$ となる. よって, 直交行列 R が存在して, $t_{-\boldsymbol{a}}\circ T(\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{x}$ となり, $T(\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ を得る. すなわち, Euclid 空間の合同変換は, 平行移動と直交行列による積の合成写像で与えられる.

上の T は次のような行列表示ができる. $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して, $\widetilde{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}$ とし, $\widetilde{R}=\begin{pmatrix}R & \boldsymbol{a}\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}$ とすると,

$$\widetilde{R}\widetilde{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}R & \boldsymbol{a}\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\\1\end{pmatrix}$$

となる.

この行列表示は, 写像の合成に対応する. すなわち, R, R' を n 次の直交行列, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}' \in \mathbb{R}^n$ に対して, $T(\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ $T'(\boldsymbol{x})=R'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}'$ とすると,

$$T'(T(\boldsymbol{x}))=R'(T(\boldsymbol{x}))+a'=R'(R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}'=R'R\boldsymbol{x}+R'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'$$

であり,

$$\begin{pmatrix}R' & \boldsymbol{a}'\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R & \boldsymbol{a}\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R'R & R'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}$$

となるからである. そこで,

$$M(n)=\left\{\begin{pmatrix}R & \boldsymbol{a}\\ {}^t\boldsymbol{o} & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ R \text{ は } n \text{ 次直交行列, } \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n\right\}$$

とおいて, これを n 次元の合同変換群という.

問 2.16　$M(n)$ は, 行列の積に関して群になることを示せ.

さて, $n=2$ として 2 次曲線の合同変換による分類を考える. 上の合同変換と同様のことが, 2 次曲線を定める方程式でもできる.

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\quad \text{として,}\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{h}\\ {}^t\boldsymbol{h} & d\end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

とおく. このとき, 方程式 (2.1) は, 対称行列 $\widetilde{A}$ が定める 2 次形式を用いて, $\widetilde{A}[\widetilde{\boldsymbol{x}}]=0$ と書き換えられる. ここでは, (2.1) で定まる 2 次曲線 C を $\widetilde{A}$ に対応する 2 次曲線と言うことにする.

さて, $P = \begin{pmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix} \in M(2)$ に対応する合同変換で, (2.1) で定まる 2 次曲線 C を写した図形を C' とする. C' が満たす方程式を考える.

P によって, 写される座標を $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = P\widetilde{\boldsymbol{x}}$ とすると, $\widetilde{\boldsymbol{x}} = P^{-1}\widetilde{\boldsymbol{x}}'$ である. $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ は $A[\widetilde{\boldsymbol{x}}] = 0$ を満たすので, これを代入すると,

$$A[P^{-1}\widetilde{\boldsymbol{x}}'] = {}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}'\,{}^tP^{-1}AP^{-1}\widetilde{\boldsymbol{x}}' = ({}^tP^{-1}AP^{-1})[\widetilde{\boldsymbol{x}}'] = 0$$

を得る. すなわち, C' は, 行列 ${}^tP^{-1}AP^{-1}$ に対応する方程式で定まる 2 次曲線である.

上の議論で, P を P^{-1} に変えると, $\widetilde{\boldsymbol{x}}'$ の満たす方程式から, $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ の満たす方程式への変換になる. このことから, 2 次曲線の分類は, 集合

$$O_A = \{\ {}^tP\widetilde{A}P \mid P \in M(2)\ \}$$

の中で, 最も C の形状をわかりやすく与える対称行列を見出せという問題になる.

注意 2.4　$\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ を 3 次の実対称行列の集合とする. 代数学序論で学習すると思うが, 写像

$$M(2) \times \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}), \qquad (P, A) \mapsto {}^tPAP, \quad P \in M(2),\ A \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$$

は, 群 $M(2)$ の $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R})$ への作用を定める. 上の集合 O_A は, この作用の A の軌道と呼ばれるものである.

定義 2.7　2 次の対称行列 A と $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ および $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{h} \\ {}^t\boldsymbol{h} & d \end{pmatrix}$ に対して, I_1, I_2, I_3 を次で定義する.

$$I_1(\widetilde{A}) = \mathrm{tr} A, \quad I_2(\widetilde{A}) = \det A, \quad I_3(\widetilde{A}) = \det \widetilde{A}$$

定理 2.10　上の記号の元で, I_1, I_2, I_3 は, O_A 上一定の値である.

証明. $P = \begin{pmatrix} R & \boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix} \in M(2)$ とする. R は直交行列なので, ${}^tR = R^{-1}$ で, 特に $\det R = 1$ である. このことから, $\det P = 1$ となり, $I_3({}^tP\widetilde{A}P) = \det {}^tP\widetilde{A}P = \det {}^tP \det \widetilde{A} \det P = I_3(\widetilde{A})$. 同様に, $I_2({}^tP\widetilde{A}P) = \det({}^tRAR) = \det(A) = I_2(\widetilde{A})$. $I_1({}^tP\widetilde{A}P) = \mathrm{tr}({}^tRAR) = \mathrm{tr}(A) = I_1(\widetilde{A})$.

上の定理から, C, C' が合同ならそれぞれから定まる I_1, I_2, I_3 の値は同じになる. しかし, 逆は成立しない. 実際, 方程式の定数倍は同じ曲線を定義する. 実際 $k \neq 0$ のとき

$$kax^2 + 2kbxy + cky^2 + 2kpx + 2kqy + kd = 0$$

は (2.1) と同じ曲線を定める. これに (2.2) で対応する行列は, (2.1) の行列を $\widetilde{A}$ とすると, $k\widetilde{A}$ である.

ここでは, $\det \widetilde{A} \neq 0$ の場合に (2.1) で定義される C を分類する. $\det \widetilde{A} = 0$ の場合は, 問題 2.17 とする. $\det \widetilde{A} \neq 0$ なら, 方程式を定数倍することにより $I_3(\widetilde{A}) = \det \widetilde{A} = 1$ として良い. 以下, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{h} \\ {}^t\boldsymbol{h} & d \end{pmatrix}$ とし, $\det \widetilde{A} = 1$ とする.

A を対角化する直交行列を R とし, A の固有値を $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ とする. $\widetilde{R} = \begin{pmatrix} R & \boldsymbol{o} \\ {}^t\boldsymbol{o} & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$
{}^t\widetilde{R}\widetilde{A}\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & p' \\ 0 & \beta & q' \\ p' & q' & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = {}^tR\boldsymbol{h}
$$

を得る.

まず, $\alpha\beta = \det A \neq 0$ とする. このとき,

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p'}{\alpha} \\ 0 & 1 & -\frac{q'}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

とおくと,

$$
{}^tT \begin{pmatrix} \alpha & 0 & p' \\ 0 & \beta & q' \\ p' & q' & d \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & d - \frac{p'^2}{\alpha} - \frac{q'^2}{\beta} \end{pmatrix}
$$

と対角化できる. ここで, $\det \widetilde{A} = 1$ より, $d - \dfrac{p'^2}{\alpha} - \dfrac{q'^2}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$ である. また, 直交行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いると, $\alpha,\ \beta$ の場所を交換することができる. よって $\alpha \geqq \beta$ と仮定して良い. この変換を終えた座標では, (2.1) は次の方程式になる.

$$
\alpha x^2 + \beta y^2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 0
$$

よって, 次を得る.

- $\alpha \geqq \beta > 0 \Leftrightarrow$「$\det A > 0$ かつ $\mathrm{tr} A > 0$」のとき, 空集合.
- $\alpha > 0 > \beta \Leftrightarrow \det A < 0$ のとき, 双曲線.
- $0 > \alpha \geqq \beta \Leftrightarrow$「$\det A > 0$ かつ $\mathrm{tr} A < 0$」のとき楕円 (特別な場合として円).

次に, $\det A = 0$ の場合を考える. この場合, A の固有値は, $\alpha(\neq 0)$ と 0 である. 上と同じ議論をすると, 直交行列を利用して,

$$
{}^t\widetilde{R}\widetilde{A}\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & p' \\ 0 & 0 & q' \\ p' & q' & d \end{pmatrix}
$$

とできる. このとき,

$$
\det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & p' \\ 0 & 0 & q' \\ p' & q' & d \end{pmatrix} = -\alpha q'^2 = 1
$$

なので, $q' \neq 0$ である. さらに

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p'}{\alpha} \\ 0 & 1 & \frac{p'^2}{2\alpha q'} - \frac{d}{2q'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

とおくと, 次を得る.

$$ {}^tT \begin{pmatrix} \alpha & 0 & p' \\ 0 & 0 & q' \\ p' & q' & d \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q' \\ 0 & q' & 0 \end{pmatrix} $$

これらの変換を終えた座標系では, (2.1) は次の方程式になる.

$$ \alpha x^2 + 2q'y = 0, \quad \alpha q'^2 = -1 $$

よって, この場合 C は放物線になる.

これまでの議論から, $\det \widetilde{A} = 1$ の場合, $\mathrm{tr}A$ と $\det A$ の値により, 合同か否かの判定もできることがわかる. 以上をまとめると, 次を得る.

定理 2.11　(2.1) で与えられる 2 次曲線 C は $\det \widetilde{A} \neq 0$ のとき, $\widetilde{A}' = \dfrac{1}{(\det \widetilde{A})^{\frac{1}{3}}} \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A' & \boldsymbol{h}' \\ {}^t\boldsymbol{h}' & d' \end{pmatrix}$ とすると,

1. 2 つの 2 次曲線が合同であるための必要十分条件は, $\det A'$, $\mathrm{tr}A'$ が一致することである.
2. 曲線の図形は, 次のように分類される.
   (a)　$\det A' > 0,\ \mathrm{tr}A' > 0$ なら空集合.
   (b)　$\det A' > 0,\ \mathrm{tr}A' < 0$ なら楕円 (特別な場合として円を含む.
   (c)　$\det A' < 0$ なら双曲線.
   (d)　$\det A' = 0$ なら放物線.

問 2.17　上の $\det \widetilde{A} \neq 0$ の場合と同じようにして, $\det \widetilde{A} = 0$ のとき (2.1) で定義される図形を分類せよ. この場合, 曲線は現れず, 2 直線, 1 直線, 2 点, 1 点, 空集合のどれかになる.

注意 2.5　上の議論は, 次元を上げても一部の修正をすれば, 同様の考察は可能である.

例えば, 3 次元空間内の 2 次曲面の分類を考えると, 4 次の対称行列を 3 次元運動群の作用で分類する話になり, やはり, 固有値の対称式を用いて分類される. ただし, 次の点が面倒になる.

- 3 次元では, 2 次元で考えた $\widetilde{A}$ が 4 次の行列になる. この場合, 方程式全体の定数倍は, $\det \widetilde{A}$ の符号を変えないので, $\det \widetilde{A} = \pm 1$ の場合を考える必要がある.
- 上の例でもあるように, 曲面の図形は, 正固有値, 0 固有値, 負固有値の数で決まる. これを係数行列から定めるのは, 固有値の基本対称式を主小行列式の和で書くことで実行される.

さらに一般化して, n 次元 Euclid 空間の $n-1$ 次元 2 次超曲面についても, 固有値の符号を利用すれば分類原理は同様であるが, その固有値の正負の個数を行列成分から直接書き下すのは, 難しい.

3　正規行列のユニタリ行列による対角化

前節の内容は, 実数行列と実ベクトル空間の内積に対する結果である. この節では, 複素ベクトル空間とその内積に対して, 類似の事を考える.

定義 3.1　A を n 次正方行列とする.

1. $A^* = {}^t\overline{A}$ を A の随伴 (adjoint) 行列という.

2. $A^* = A$ が成立するとき, A を Hermite(エルミート) 行列という.
3. $A^* = -A$ が成立するとき, A を歪 Hermite 行列 (skew Hermite) という.
4. $A^*A = E$ のとき, A をユニタリ (unitary) 行列という.
5. $A^*A = AA^*$ が成立するとき, A を正規行列という.

実行列では, $A^* = {}^tA$ なので, 上の定義の 1., 2., 3., 4. はそれぞれ転置行列, 対称行列, 交代行列, 直交行列の定義になる. 実ベクトル空間での直交行列の役割は, 複素ベクトル空間ではユニタリ行列が担う.

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = {}^t\overline{\boldsymbol{u}}A\boldsymbol{v} = \overline{{}^t({}^t\overline{A}\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v} = \overline{{}^t(A^*\boldsymbol{u})}\boldsymbol{v} = (A^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成立する. これが随伴行列の定義の由来である.

問 3.1　次を示せ.

1. Hermite 行列の固有値は全て実数である.
2. 歪 Hermite 行列の固有値は全て純虚数である.
3. Hermite 行列において, 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.
4. U がユニタリ行列 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $(U\boldsymbol{u}, U\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
5. U がユニタリ行列なら, $|\det U| = 1$
6. $\lambda \in \mathbb{C}$ がユニタリ行列の固有値なら, $|\lambda| = 1$
7. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{C}^n$ とするとき, $U = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ がユニタリ行列 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は正規直交基底.
8. ユニタリ行列全体は, 行列の積を演算として群になる (ユニタリ群という).

補題 3.1　A を正規行列, λ を A の固有値, $V(\lambda) \subseteq \mathbb{C}^n$ を λ に対する固有空間とする. このとき,

1. $A^*(V(\lambda)) = \{A^*\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V(\lambda)\} \subseteq V(\lambda)$
2. $A^*(V(\lambda)^\perp) = \{A^*\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V(\lambda)^\perp\} \subseteq V(\lambda)^\perp$
3. $A(V(\lambda))^\perp = \{A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V(\lambda)\} \subseteq V(\lambda)^\perp$

証明. 1. $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ とすると,

$$A(A^*\boldsymbol{v}) = (AA^*)\boldsymbol{v} = (A^*A)\boldsymbol{v} = A^*(A\boldsymbol{v}) = \lambda A^*\boldsymbol{v}$$

となるので, $A^*\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$

2. $\boldsymbol{u} \in V(\lambda)^\perp$ とする. 任意の $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に対して,

$$(A^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

となるので, $A^*\boldsymbol{u} \in V(\lambda)^\perp$.

3. $\boldsymbol{u} \in V(\lambda)^\perp$ とする. 任意の $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に対して, 1. より, $A^*\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に注意すると,

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v}) = 0$$

となるので, $A\boldsymbol{u} \in V(\lambda)^\perp$.

定理 3.1　複素行列 A がユニタリ行列で対角化可能である必要十分条件は, A が正規行列であることである.

証明. D を対角行列とすると, 明らかに正規行列である. A がユニタリ行列 U を用いて $U^*AU = D$ と対角化されるとすると, $A = UDU^*$ となり,

$$\begin{aligned} A^*A &= (UDU^*)^*(UAU^*) = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^* = UDD^*U^* \\ &= UDU^*UD^*U^* = (UDU^*)(UD^*U^*)^* = AA^* \end{aligned}$$

となって, A は正規行列である.

正規行列のユニタリ行列による対角化の手順は, 本質的に実対称行列の直交行列による対角化と同じで, n に関する帰納法で証明される.

λ_1 を A の固有値, $V(\lambda_1)$ を λ_1 の固有空間とする. $\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_1)^\perp$ なので, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i$ を $V(\lambda_1)$ の正規直交基底, $\boldsymbol{u}_{i+1}, \ldots \boldsymbol{u}_n$ を $V(\lambda_1)^\perp$ の正規直交基底とすると, $U' = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ はユニタリ行列になる.

$$A\boldsymbol{u}_k = \lambda_1 \boldsymbol{u}_k, \quad k = 1, \ldots, i \tag{3.1}$$

であり, 補題 3.1 3. より, $k = i+1, \ldots n$ に対して, $A\boldsymbol{u}_k \in V(\lambda)^\perp$ である. すなわち,

$$A\boldsymbol{u}_k = \sum_{j=i+1}^{n} a'_{kj}\boldsymbol{u}_j, \qquad k = i+1, \ldots, n \tag{3.2}$$

が成立する. $A' = (a'_{ij})$ を上の係数から定まる $n-i$ 次正方行列とする. 上の (3.1), (3.2) を行列を用いて書くと.

$$AU' = A(\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 E_i & O \\ O & A' \end{pmatrix} = U'\begin{pmatrix} \lambda_1 E_i & O \\ O & A' \end{pmatrix}$$

となる. 両辺に $U'^{-1} = U'^*$ を賭けると, $U'^*AU' = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_i & O \\ O & A' \end{pmatrix}$ を得る. A' が正規行列になることは容易に確かめられるので, 帰納法の仮定より, $n-i$ 次のユニタリ行列 U'' が存在して, $U''^*A'U''$ は対角行列になる. $U = \begin{pmatrix} E_i & O \\ O & U'' \end{pmatrix} U'$ とおけば, U はユニタリ行列になり, U^*AU は対角行列になる.

H を Hermite 行列とすると, 異なる固有値に対する固有空間は, 互いに直交する. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を H の固有値とする. $V(\lambda_i)$ を λ_i に対する $\mathbb{C}^n$ の固有空間とする. $\boldsymbol{v}(\lambda_i)_1, \ldots, \boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i}$ を $V(\lambda_i)$ の正規直交基底とし, $P_{\lambda_i} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を次で定義する.

$$P_{\lambda_i}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{v}(\lambda_i)_1, \boldsymbol{a})\boldsymbol{v}(\lambda_i)_1 + (\boldsymbol{v}(\lambda_i)_2, \boldsymbol{a})\boldsymbol{v}(\lambda_i)_2 + \cdots + (\boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{v}(\lambda_i)_{k_i}$$

上の定義から, $\mathrm{Im}(P_{\lambda_i}) \subseteq V(\lambda_i)$ である. P_{λ_i} は固有空間 $V(\lambda_i)$ への射影と呼ばれる. この射影を用いると, 行列 H を線形変換 $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ と見ると, 線形変換として次が成立する.

$$H = \lambda_1 P_{\lambda_1} + \lambda_2 P_{\lambda_2} + \cdots + \lambda_k P_{\lambda_k}$$

これを, Hermite 変換 H のスペクトル分解 (Spectral decomposition) といい, 固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を H のスペクトルという.

3.1　複素数体上の Hermite 形式

実数の場合の 2 次形式に対応する概念を複素数で考える際には, 2 通りの拡張の仕方が考えられる．ひとつは, 実数の場合と同様に 2 次の斉次多項式のなす関数を座標変換した場合, どれだけやさしくできるかという問題で, この場合も, 2 次の斉次多項式は 2 次形式と呼ばれる．複素数体の 2 次形式に関しては, 本質的にそれを定める対称行列のランクで分類できる (このことの証明は, 時間があれば述べる).

もうひとつの考え方は, 複素ベクトル空間の内積を一般化する方法である．ここでは, まず, この方法について述べる．

$H = (a_{ij})$ を n 次の Hermite 行列とする．$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$H\{\boldsymbol{x}\} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}H\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij}\overline{x_i}x_j$$

を n 変数の **Hermite 形式**という．

問 3.2　H を Hermite 行列とすると, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $H\{\boldsymbol{x}\} \in \mathbb{R}$ となることを示せ．

正則行列 P に対して, 座標変換 $P\boldsymbol{x}$ で $H\{P\boldsymbol{x}\} = \overline{{}^t\boldsymbol{x}}{}^t\overline{P}HP\boldsymbol{x}$ をできる限り簡単な式にすることを考える．Hermite 行列の固有値は全て実数なので, 実ベクトル空間上の 2 次形式と同様の結果 (Sylvester の慣性法則など) が同様の議論から導かれる．証明は省略する．

定理 3.2　正則行列による座標変換により, Hermite 形式は次の形にできる．

$$H\{\boldsymbol{x}\} = |x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$$

ここで, p, q は座標変換の取り方によらずに一意的に定まる．

問 3.3　次の Hermite 行列をユニタリ行列で対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} a & i & 1 & -i \\ -i & a & i & 1 \\ 1 & -i & a & i \\ i & 1 & -i & a \end{pmatrix}$

4　ベクトル空間 (線形空間)

4.1　ベクトル空間の定義

ここまで, **数ベクトル**しか基本的に扱ってきていないが, 内積, 基底, 1 次独立, 線形写像などの概念は, 数ベクトル以外の集合に適用することができる．それにより, いままで現れたいろいろなものの応用範囲が拡大さる．その際の鍵になるのは,「加法」と「スカラー倍」が定義されているということと, スカラー全体の集合が数体系として整っていることである．

以下の内容は, [2],[3],[4] の寄せ集めである．

定義 4.1（体）　$\mathbb{K}$ を集合とし, $a, b \in \mathbb{K}$ とする. 和 $a + b \in \mathbb{K}$ と積 $ab \in \mathbb{K}$ が定義され, 次を満たす時, $\mathbb{K}$ を体 (英: field, 独: Körper, 仏: corps) という.

1. $a + b = b + a$ (和の交換法則)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (和の結合法則)
3. $0 \in \mathbb{K}$ が存在して, 全ての $a \in \mathbb{K}$ に対して $a + 0 = 0 + a = a$
4. 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して, $b \in \mathbb{K}$ が存在して, $a + b = 0$ (このとき, b を $-a$ と書く.)
5. $(ab)c = a(bc)$ (積の結合法則)
6. $1 \in \mathbb{K}$ が存在して, $1a = a1 = a$ (積の単位元)
7. $a \neq 0$ とすると, $b \in \mathbb{K}$ が存在して, $ab = ba = 1$ (このとき, b を a^{-1}, $\dfrac{1}{a}$ と書く.)
8. $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対して, $(a + b)c = ab + ac$, $a(b + c) = ab + ac$ (分配法則)

問 4.1　体の公理から, $a0 = 0a = 0$, $(-1)a = -a$, $(-1)(-1) = 1$ を証明せよ.

要するに, よく知られた 4 則演算が可能な集合の事を, 体と呼ぶのである. これまで学んだ数学では, 有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ が例としてすぐに思い浮かぶと思うが, 例えば次の「分数式全体」も体である.

$$\mathbb{C}(X) = \left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f(X), g(X) \text{ は } X \text{ の多項式で}, g(X) \neq 0 \right\}$$

3 年次向けの講義, 代数学 I, II では, Galois 理論が講義されると思うが, そこでは $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間が多く現れる. また, ここに挙げた例は全て無限集合であるが, 有限個の元からなる体 (有限体) が存在し, 符号理論や暗号理論では, 重要である.

有限体では, 素数 p が存在して, $p = 0$ となる. 一般の体でも, 素数 p に対して $p = 0$ となることが起こりうる (代数学 I で学習する). この素数のことを体 $\mathbb{K}$ の標数といい, $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ と書く. このような体を, 正標数の体ともいう. このような素数が存在しない時 ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ など) 標数 0 の体といい, $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ とする. 正標数の体は, 別扱いを要する場合もあるので, 以下では別扱いが必要な場合は, 体の標数に対する断りを書くことにする.

上の定義 4.1 では, 積の交換法則は仮定していない. 積の交換法則が成立する体を可換体という. 最近では, 積の交換法則が成立するとき, 単に体と言い, 交換法則が成立しない体は, 斜体ということが普通であるが, この講義では, 可換体ということにする.

交換法則が成立しない場合, ベクトル空間の定義において, スカラーを右からかけるか左からかけるかで結果が異なるので, 扱いが少し面倒になる. 以下, この講義では, 可換体だけを扱うことにする.

問 4.2（非可換な体の例: Hamilton の 4 元数体）

$$\mathbb{H} = \{a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

とする. 1 を積の単位元, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$ で積を定義して結合法則, 分配法則が成立するように拡張する. この時 $\mathbb{H}$ は非可換体になることを示せ.

ネットの SEGA の資料には $\mathbb{H}$ の興味深い応用が書かれている. それに関する問題を出しておく. SEGA の資料 (第 8 講) では真面目に計算してあるが, 次の問では, 幾何学序論で学ぶ連続写像や連結性などの性質を利用すると, あまり計算せずとも答は出せる (使える道具を増やすことの意義を理解していただきたい). もちろん, SEGA の資料のように具体的にきちんと計算することも, 重要である. 以下の問は, プレートトリック (動

画へのリンク) の解説に繋がるものである．近年では, これは, ロボット工学で問題になった．3 次元で, 手持ちのカメラをある軸の周りに $360°$ 回して元に戻せないのに, $720°$ 回すと戻せるのは何故か?という問題である．その理由は, 下の問で $\mathbb{H}^1$ の幾何学的な性質 (単連結性) と, $A(q)=E_3 \Longleftrightarrow q=\pm 1$(2 重被覆) にある．

問 4.3　$\mathbb{H} \ni q = a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ の対応で, $\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ を同一視する．$\overline{q} = a-b\boldsymbol{i}-c\boldsymbol{j}-d\boldsymbol{k}$ と置く．次を示せ．

1. $q,\ q' \in \mathbb{H}$ に対して, $\overline{qq'} = \overline{q'}\,\overline{q}$ が成立する．
2. 上の $\mathbb{R}^4$ の同一視で, $\mathbb{H}$ の標準内積を入れたとき, その内積は, $\dfrac{1}{2}(q\overline{q'}+\overline{q}q')$ で与えられることを示せ．
3. $|q| = \sqrt{(q,q)}$ とすると, $|qq'| = |q||q'|$ が成立することを示せ．
4. $\mathbb{H}^1 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ とする．$q \in \mathbb{H}^1$, $a,\ b \in \mathbb{H}$ に対して, $q \cdot a = qa\overline{q}$ とおくと, これは, $\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}^4$ と同一視したときに線形写像になり, さらに, $(q\cdot a, q\cdot b) = (a,b)$ が成立することを示せ．
5. $W = \{b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}\} \subset \mathbb{H}$ とおくと, $q \in \mathbb{H}$, $w \in W$ に対して, $q \cdot w \in W$ となることを示せ．
6. 4., 5. より, $q \in \mathbb{H}^1$ と $w \in W$ に対して, $w \mapsto q\cdot w$ は, W の内積を変えない一次変換になる．従って, W の正規直交基底 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ でこの写像を行列表示したとき, 3 次の直交行列になるが, その行列を $A(q)$ と書く．((a), (b), (c) は独立に解答できる ((a) を解かなくても, (b), (c) は示せる.).
   (a) (割と大変)$A(q)$ を求めよ．
   (b) $\det A(q) = 1$ を示せ (きちんと計算しても良いし, 手抜きで, 連続性とか連結性を用いて良い).
   (c) $A(q) = E_3 \Longleftrightarrow q = \pm 1$ を示せ．

定義 4.2（ベクトル空間）　$\mathbb{K}$ を可換体とする．V を集合とし, $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V$ と $a \in \mathbb{K}$ に対して, 加法 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \in V$ とスカラー倍 $a\boldsymbol{v} \in V$ が定義されて, 次を満たすとき V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 (vector space), あるいは線形空間という．この時, $\mathbb{K}$ の元をスカラー (scaler) といい, $\mathbb{K}$ を**基礎体**という．

1. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$ (和の交換法則)
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ ($\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V$, 和の結合法則)
3. $\boldsymbol{o} \in V$ が存在して, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ (零ベクトル)
4. $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\boldsymbol{w} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ (逆ベクトル, $\boldsymbol{w}$ を $-\boldsymbol{v}$ と書く.)
5. $a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v},\ a,\ b \in \mathbb{K}$
6. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
7. $(a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v},\quad a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{w},\quad a,\ b \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V$

問 4.4　ベクトル空間の公理から, $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ を証明せよ．

零ベクトルだけからなる集合 $\{\boldsymbol{o}\}$ はベクトル空間になる．これを自明なベクトル空間という．

数ベクトルの集合 $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \,\middle|\, v_i \in \mathbb{K} \right\}$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である．

$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ の時が, 1 年次の線形代数学で現れたものである.

ベクトル空間の元のことを**ベクトル**という. 数ベクトル空間以外にも, 下に述べるように, 多様なベクトル空間がある. これらのベクトル空間の元に対しては, 高校のときに学習した「向きと大きさ」という概念は定義を別にする必要がある.

問 4.5（ベクトル空間の例） 次の集合は, 自然な加法とスカラー倍で, 与えられた可換体上のベクトル空間になることを示せ.

1. $M_{m,n}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \mid m \times n \text{ 行列}, a_{ij} \in \mathbb{K}\}$
2. X を集合として, $C(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ (X から K への写像全体)
3. $\mathbb{K}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}\}$. X は不定元で, $\mathbb{K}[X]$ は, $\mathbb{K}$ の元を係数とする多項式全体の集合.
4. $\{\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,} \mid a_n \in \mathbb{C}\}$ (数列の集合)
5. $\ell^\infty = \left\{\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,} \mid \ a_n \in \mathbb{C},\ \sup_n |a_n| < \infty\right\}$ (有界な数列の集合)
6. $\ell^1 = \left\{\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,} \mid \ a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\right\}$
7. $\ell^2 = \left\{\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,} \mid \ a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\right\}$
8. $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $C^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続関数 }\}$
9. $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $L^\infty([a,b]) = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \ \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty\right\}$

問 4.6 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを示せ.

定義 4.3 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ をベクトルとする.

1. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ をスカラーとする.
$$a_1 \boldsymbol{v}_1 + a_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_k \tag{4.1}$$
の形の元を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の **1 次結合 (あるいは線形結合)** と言う.
2. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ をスカラーとする.
$$a_1 \boldsymbol{v}_1 + a_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o} \tag{4.2}$$
を, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の線形関係という. $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ のとき (4.2) が成立するのは明らかであるが, これを**自明な線形関係**という. 自明でない線形関係を**非自明な線形関係**という.
3. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が**一次独立 (あるいは線形独立)** であるとは, これらが自明な線形関係しか持たない事を言う. 一次独立でない場合, **一次従属 (あるいは線形従属)** と言う.

定義 4.4 V の部分集合 W が部分空間 (部分ベクトル空間) とは, つぎの 2 つの条件を満たす集合をいう.

1. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ なら $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$
2. 任意の $\boldsymbol{v} \in W$, $a \in \mathbb{K}$ に対して $a\boldsymbol{v} \in W$

問 4.7 部分空間はベクトル空間になること (ベクトル空間の公理系を満たすこと) を示せ.

V 全体および $\{\boldsymbol{o}\}$ は, 上の部分空間の定義を満たす. これらを**自明な部分空間**と言う. 自明でない部分空間を**真の部分空間**とも言う.

部分集合 $S \subset V$ に対して, S の元の一次結合 (有限和) 全体のなす集合は, V の部分空間になる. これを次の記号で表す.

$$< S >= \left\{ \sum_k a_k \boldsymbol{v}_k \mid a_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v}_k \in V \right\}$$

$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$(有限集合) のときには, $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r >$ と略記する.

定義 4.5　V をベクトル空間とする. $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i \in I}$ が V の基底であるとは, つぎの 2 つの条件をみたすことをいう.

1. $< \{\boldsymbol{u}_i\}_{i \in I} >= V$
2. $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i \in I}$ の任意の有限部分集合のベクトルは一次独立.

$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i \in I}$ を V の基底とすると, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は, 次の形で一意的に書ける.

$$\boldsymbol{v} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_r \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{u}_j \in \{\boldsymbol{u}_i\}_{i \in I} \quad a_j \in \mathbb{K}, a_j \neq 0, j = 1, \ldots, r$$

問 4.8　上の一意性を証明せよ.

定理 4.1　ベクトル空間には基底が存在し, その濃度は, 基底の取り方に依らず一定である.

証明. 有限個の元から生成されるベクトル空間にのみ, この定理を証明する.

まず, 基底が存在することを示す. V をベクトル空間とし, $S = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$ として, $< S >= V$ とする. $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{o}$, $i = 1, \ldots, N$ と仮定して良い. $< \boldsymbol{u}_1 >= V$ なら, $\boldsymbol{u}_1$ は V の基底である. そうでないなら, $\boldsymbol{u}_{k_2} \in S$ で, $\boldsymbol{u}_{k_2} \notin < \boldsymbol{v}_1 >$ となるものが存在する. この時, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_{k_2}$ は一次独立である. $V =< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2} >$ なら, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2}\}$ が V の基底である. $V \supsetneqq < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2} >$ なら, $\boldsymbol{u}_{k_3} \in S$ で, $\boldsymbol{u}_{k_3} \notin < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2} >$ となるものが存在する. この時, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2}, \boldsymbol{u}_{k_3}\}$ は一次独立である. $< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{k_2}, \boldsymbol{u}_{k_3} >= V$ なら, これらが基底になる. 以下, この操作を続けて行けば, $|S| < \infty$ より, V の基底に到達する.

個数が基底の取り方に依らないことを示す. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする. $m > n$ として矛盾を導く. それぞれが基底なので, $\boldsymbol{u}_i$ を $\boldsymbol{v}_j$ の一次結合で, $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{u}_j$ の一次結合で書く事ができる.

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \boldsymbol{v}_j, \ (i = 1, \ldots, m), \quad \boldsymbol{v}_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \boldsymbol{u}_k, \ (j = 1, \ldots, n)$$

後ろの式を前に代入すると,

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji} \right) \boldsymbol{u}_k$$

となる. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ は基底なので, 一次結合での書き方の一意性から,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji} = \delta_{ki}$$

を得る. $n \times m$ 行列を $A = (a_{ji})$ と定め, $m \times n$ を $B = (b_{kj})$ とすると, 上の式は, $BA = E_m$ と表される. この時,

$$n \geqq \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank} E_m = m$$

となり, 仮定 $m > n$ に矛盾する.

注意 4.1　生成元が無限個ある場合は, 基底の存在証明には Zorn(ツォルン) の補題が必要になる.

問 4.9　問 4.5 の記号を用いる.

1. $M_{m\,n}(\mathbb{K})$ の次元を求めよ.
2. $|X| < \infty$ のとき, $\dim C(X, \mathbb{K}) = |X|$ を示せ.
3. $\mathbb{K}[X]$ において, $\{1, X, \dots, X^i, \dots\}$ は基底になることを示せ.

問 4.10　1. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であることを示せ.

2. 「ベクトル空間には基底が存在する」という定理を認めたとき, 次の命題は正しいと言えるかを判定せよ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について $f(x + y) = f(x) + f(y)$ を満たすと仮定すると, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = cx$.

注意. $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と見たときの基底の集合は, Lebesgue(ルベーグ) 非可測集合の例となる. 3 年次対象の関数解析学の講義で現れる (かも知れない).

V の基底の濃度を V の次元といい $\dim V$ と書く. 基礎体 $\mathbb{K}$ を明示する場合は, $\dim_{\mathbb{K}} V$ と書く. $\dim V < \infty$ のとき有限次元ベクトル空間, そうでないとき無限次元ベクトル空間という.

問 4.11　$\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と見た時, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ を示せ.

1 年次の線形代数学では, 基底の個数は有限個に限っていたが, 多項式全体がなすベクトル空間のように, 無限個の基底を持つ場合も多くある. ただし, ベクトル空間を代数的に議論する場合では, 無限和は基本的に取り扱わない. 無限和を考える際には,「収束の問題」を考える必要がある. この講義では収束の問題が現れない場合だけを考える.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は, $\mathbb{K}^n$ の基底になる. これらを $\mathbb{K}^n$ の標準基底という.

定義 4.6（部分空間の和, 直和）　1. W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とするとき, $W_1 + W_2$ を, $W_1 \cup W_2$ が生成する部分空間とする. 具体的には, 次の集合になる.

$$W_1 + W_2 = \{\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\ \}$$

これを W_1 と W_2 の和空間という. 有限個の部分空間 $W_1, \dots, W_r$ に対してもこれらの和空間は定義でき, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} W_i$ という記号を用いる. すなわち,

$$\sum_{i=1}^{r} W_i = \{\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_r \mid \boldsymbol{w}_i \in W_i\ \}$$

2. 和空間 $W_1 + W_2$ において, $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ のとき, $W_1 \oplus W_2$ と書いて, W_1 と W_2 の直和という. 有

限個の直和も帰納的に定義される．すなわち，$\sum_{i=1}^{m} W_i$ が直和であるとは，

$$(W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots W_m) \cap W_i = \{\boldsymbol{o}\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

が成立することである．このとき，次の記号を用いる．$W_1 \oplus \cdots \oplus W_m = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$

3. V の部分空間 W に対して，$V = W \oplus W'$ となる部分空間 W'(resp. W) を W(resp. W') の**補空間**という．

注意 4.2　補空間の取り方は，無限にありうる．例えば，数ベクトル空間 $\mathbb{K}^2$ に対して，$\boldsymbol{e}_1$ が生成する部分空間 $W = \mathbb{K}\boldsymbol{e}_1 = \{\lambda \boldsymbol{e}_1 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ の補空間は，$b \in \mathbb{K}$ に対して，$W'_b = \mathbb{K}(b\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \{\lambda(b\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ で与えることができる．ここで，b の値が異なれば，異なる集合になることに注意する．

問 4.12　上の注意で，任意の $b \in \mathbb{K}$ に対して，$\mathbb{K}^2 = W \oplus W'_b$ となることを示せ．

命題 4.1　ベクトル空間の直和，$V = W \oplus W'$ が与えられると，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$, $\boldsymbol{w} \in W$, $\boldsymbol{w}' \in W'$ と一意的に表される．

証明．直和の定義から，$\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{w} \in W$, $\boldsymbol{w}' \in W'$ が存在して，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$ となることは明らかである．一意性を示す．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in W$, $\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}' \in W'$ となったとする．このとき，$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{w}'$ を得る．この式の左辺は W の元で，右辺は W' の元となるが，$W \cap W' = \{\boldsymbol{o}\}$ なので，$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{o}$ となり，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{u}'$ を得る．

問 4.13　V をベクトル空間 W, W' を V のベクトル空間とし，$V = W + W'$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}',\ \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{w}' \in W' \Longrightarrow \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{o}$$

が成立することと，$V = W \oplus W'$ となることが同値であることを示せ．

定義 4.7（ベクトル空間の直積，直和）　1. $\{V_i\}_{i \in I}$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の族とする．これらの直積集合に成分毎の和とスカラー倍を考えるとベクトル空間になる．これを $\prod_{i \in I} V_i$ と書く．すなわち，集合として，

$$\prod_{i \in I} V_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in V_i\}$$

であり，$(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，和とスカラー倍は次で与えられる．

$$(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}\,, \qquad \lambda(a_i)_{i \in I} = (\lambda a_i)_{i \in I}$$

2. 上において，$i \in I$ を固定した時，$\{(a_k)_{k \in I} \in \prod_{k \in I} V_k \mid k \neq i \text{ のとき } a_k = \boldsymbol{o}\}$ は，V_i と同型な部分空間になる．これら V_i の直和は次で定義する．

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \neq \boldsymbol{o} \text{ となる } i \text{ は有限個 }\}$$

I が有限集合なら，直和と直積は同じものになるが，無限集合なら一般に $\prod_{i \in I} V_i \supsetneqq \bigoplus_{i \in I} V_i$ である．

注意 4.3　一般的に無限個の空でない集合の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ に対して, $\prod_{i\in I} V_i \neq \emptyset$ となることは,「選択公理 (Axiom of choice)」と呼ばれるものである．選択公理は Zorn の補題と同値な命題である．V_i がベクトル空間の場合, $\boldsymbol{o} = \{\boldsymbol{o}_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ ($\boldsymbol{o}_i \in V_i$ は V_i の零ベクトル) がわかるので, 選択公理は不要である．

問 4.14　上で定義した直和が $\prod_{i\in I} V_i$ の和とスカラー倍で部分空間になることを示せ.

4.2　線形写像, 線形変換

定義 4.8　V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f : V \to W$ が線形写像であるとは, 次を満たすものをいう.

1. $f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$
2. $f(a\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} \in V$, $a \in \mathbb{K}$

$V = W$ のとき, f は特に線形変換, あるいは 1 次変換という.

f が全単射であるとき, f は線形同型写像という．このとき, V と W は線形同型であるといい, $V \cong W$ という記号を用いる.

問 4.15　問 4.5 の記号を用いる．次の写像は線形写像になることを示せ.

1. $T : M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{n\,m}(\mathbb{K})$, $T(A) = {}^tA$, $(A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
2. $a \in X$ として, $\delta_a : C(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\delta_a(f) = f(a)$, $(f \in C(X, \mathbb{K}))$.
3. $I : C^0([a, b]) \to \mathbb{C}$, $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, $(f \in C^0([a, b]))$.
4. f, $g \in C^0([a, b])$, $m_g : C^0([a, b]) \to C^0([a, b])$, $m_g(f) = gf$, $(f \in C^0([a, b]))$.

問 4.16　U, V, W をベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする．次を示せ.

1. (a) $V \cong V$,　(b) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$,　(c) $U \cong V$, $V \cong W \Rightarrow U \cong W$
2. $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\ \} \subset V$, $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\ \} \subset W$ は, それぞれ部分空間になることを示せ.
3. f が単射であることと $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{o}\}$ が同値である事を示せ.
4. 有限次元ベクトル空間 V, W が $V \cong W$ である必要十分条件は, $\dim V = \dim W$ であることを示せ.
5. V, W が有限次元で $\dim V = \dim W$ のとき, 線形写像 $f : V \to W$ に対して, 次の 3 条件は同値になることを示せ.
   (a) f は線形同型.　(b) f は全射.　(c) f は単射.
6. $\mathbb{C}[X] = \{\, a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ を複素数を係数とする多項式全体がなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．次を示せ (無限次元では, 上の同値性が成立しない).
   (a)　$m_X : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $f \mapsto Xf$, $f \in \mathbb{C}[X]$ は単射線形写像であるが全射ではない.
   (b)　$D_X : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $f \mapsto f'$, $f \in \mathbb{C}[X]$ は全射線形写像であるが単射ではない.
   (c)　$D_X \circ m_X - m_X \circ D_X = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[X]}$
7. 有限次元ベクトル空間 V の線形変換 f, g で, $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_V$ となるものは, 存在しない事を示せ.

$f : U \to V$ を有限次元ベクトル空間の間の線形写像とし, U の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$, V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とする. $\boldsymbol{u}_i$ の f による像は, V の基底の 1 次結合で書けるので, その係数を a_{ki} とする.

$$f(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\boldsymbol{v}_k$$

この係数を使って, $m \times l$ 行列 $A = (a_{ij})$ を作る. f が線形写像であるので, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_l\boldsymbol{u}_l$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{l} x_i\boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{l} x_i f(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i=1}^{l} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ki}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{l} a_{ki}x_i\right)\boldsymbol{v}_k$$

となる. 線形結合の係数の一意性から, $f(\boldsymbol{x})$ の V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に対する座標は, $\sum_{i=1}^{l} a_{ki}x_i$, $k = 1, \ldots, m$ となる. これは, 行列の積を用いると $f(\boldsymbol{x})$ の座標が次で計算されることを示している.

$$f(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

つまり, 線形写像は, 基底を定めると, 座標に対して行列を左からかけるという計算になる. この A を, U の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ と V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に対する線形写像 f の表現行列という.

さらに, W を別のベクトル空間, $\boldsymbol{w}_1 \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W の基底とし, $g : V \to W$ を線形写像で, 上と同様に, $n \times m$ 行列 $B = (b_{ij})$ を $g(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\boldsymbol{w}_k$ で定める. このとき,

$$g \circ f(\boldsymbol{u}_i) = g(f(\boldsymbol{u}_i)) = g(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}g(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}(\sum_{p=1}^{n} b_{pk}\boldsymbol{v}_p) = \sum_{p=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m} b_{pk}a_{ki})\boldsymbol{v}_p$$

を得る. これは, $g \circ f(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\boldsymbol{w}_i$ で行列 $C = (c_{ij})$ を定めると, $C = BA$ が成立することを示している. つまり, 写像の合成は座標で表すと行列の積に対応する. 実際には, 話は逆で, 行列の積は線形写像の合成と対応するように定義されているのである

基底を取り替えた時, 表現行列がどの様に変化するかを計算しておく. $\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_l\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m\}$ をそれぞれ U, V の別の基底とする. それぞれの基底の変換行列を $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ とする. すなわち,

$$\boldsymbol{u}'_i = \sum_{j=1}^{l} p_{ji}\boldsymbol{u}_j, \qquad \boldsymbol{v}'_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ji}\boldsymbol{v}_j$$

とする. 一方, $\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_l\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m\}$ の f の表現行列を, $A' = (a'_{ij})$ とする.

$$f(\boldsymbol{u}'_i) = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji}\boldsymbol{v}'_i$$

この時,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}'_i) &= f(\sum_{j=1}^{l} p_{ji}\boldsymbol{u}_j) = \sum_{j=1}^{l} p_{ji}\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{l} a_{kj}p_{ji})\boldsymbol{v}_k \\ &= \sum_{j=1}^{m} a'_{ji}\boldsymbol{v}'_j = \sum_{k=1}^{m} a'_{ji}\sum_{j=1}^{m} q_{kj}\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m} q_{kj}a'_{ji})\boldsymbol{v}_k \end{aligned}$$

となる. 従って, $\sum_{j=1}^{l} a_{kj}p_{ji} = \sum_{k=1}^{m} q_{kj}a'_{ji}$ $k=1,\dots,m$, $i=1,\dots,l$ となる. これは, 行列で書くと, $AP = QA'$ となる. すなわち,

$$A' = Q^{-1}AP$$

を得る. これが, 基底の取り替えに関する表現行列の変換規則である.

特に, $T : V \to V$ を線形変換とし, A を V の適当な基底に対する T の行列表示とする. この時, V の基底を取り替えると, P を基底の取り替えを与える行列とするとき, T の行列表示は $P^{-1}AP$ となる. 特に, $\det(P^{-1}AP) = \det A$, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$ が成立するので, 次の定義が意味を持つ.

定義 4.9 V を有限次元ベクトル空間, $T : V \to V$ を V の線形変換, $A = (a_{ij})$ を T の行列表示とする. このとき,

$$\det T = \det A, \qquad \mathrm{tr}T = \mathrm{tr}A$$

で線形変換 T の行列式とトレースを定義する. これらは, 行列表示 A の取り方によらずに定まる値である.

問 4.17 $P_n(\mathbb{K}) = \{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ すなわち, n 次以下の多項式の空間とする. $T : P_n(\mathbb{K}) \to P_n(\mathbb{K})$ を $(Tf)(x) = f(x+1)$ で定めるとこれは線形変換になる. $P_n(\mathbb{K})$ の基底, $\{1, x, \dots, x^n\}$ に対する T の表現行列 A とその逆行列を求めよ.

定義 4.10 V をベクトル空間, $T : V \to V$ を V の線形変換とする.

$$T\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}, \quad \lambda \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$$

となるとき, λ を T の固有値, $\boldsymbol{v}$ を T の固有値 λ に属する固有ベクトルという.

V が有限次元である場合, 固有値, 固有ベクトルの計算は, これまでに学んだ方法と同じである. すなわち, T の V の適当な基底に対する行列表示を $A = (a_{ij})$ とするとき, 固有値は, 次の特性多項式の根である.

$$\varphi_A(x) = \det(xE - A)$$

従って, 全ての固有値を考える場合には, $\mathbb{K}$ に代数方程式の根が必ず存在する必要がある (そのような例の一つが複素数体である).

無限次元のベクトル空間でも, 固有値, 固有ベクトルは上のように定義される. ただし, 無限次元の場合, $\mathbb{K}$ が代数的に閉じていても固有値, 固有ベクトルが存在しないようなことが起こる.

例 4.1 例えば, 問 4.17 を多項式全体のなすベクトル空間, $P(\mathbb{C}) = \{$ 複素係数の x の多項式 $\}$ で考えて, $T(f)(x) = f(x+1)$, $f \in P(\mathbb{C})$ の固有値を考える. $T(f)(x) = \lambda f(x)$ とし, $f(0) = a$ とすると

$$\begin{aligned}
&f(1) = (Tf)(0) = \lambda f(0) = a\lambda \\
&f(2) = (Tf)(1) = \lambda f(1) = a\lambda^2 \\
&\cdots \\
&f(n) = (Tf)(n-1) = \lambda f(n-1) = a\lambda^n \\
&\cdots
\end{aligned}$$

を得るので, 全ての自然数 n に対して, $f(n) = a\lambda^n$ が成立しないといけない. しかし, このような 0 でない多項式は存在しない. 関数, $f(x) = a\lambda^x$ はこの条件を満たすが, これは多項式ではない. 無限次元で固有値問題を考える際には, ほとんどの場合, 何らかの形で収束の概念を導入して, 極限を考えられるようにする.

定義 4.11　V, W をベクトル区間, $f : V \to W$ を線形写像とする．$f(V)$ は W の部分空間になるので, f の階数を,

$$\mathrm{rank}(f) = \dim f(V) = \dim \mathrm{Im}(f),$$

で定義する．

定理 4.2　V, W をベクトル区間, $f : V \to W$ を線形写像とする．V, W の基底を取り, これらの基底に対する f の行列表示を $A = (a_{ij})$ とすると, $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}A$ である．

証明．$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ を V の基底, $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ を W の基底とする．$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m$ とすると, $f(\boldsymbol{v}) = a_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + a_m f(\boldsymbol{v}_m)$ となる．従って, $f(V)$ は, 基底の像 $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ から生成される部分空間になる．A を上の基底に対する f の行列表示とする．

$\mathrm{rank}A = r$ とする．行列の基本変形を利用すると, 正則な m 次正方行列 P と正則な n 次正方行列 Q が存在して, 次の形に変形できる．

$$QAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

上の基底の取り替えに対する行列表示の変換則から, これは, V の基底, $\{P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_m\}$ と W の基底 $\{Q^{-1}\boldsymbol{w}_1, \ldots, Q^{-1}\boldsymbol{w}_n\}$ に対して,

$$f(P\boldsymbol{v}_i) = Q^{-1}\boldsymbol{w}_i, \quad i = 1, \ldots, r, \qquad f(P\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{o}, \quad i = r+1 \ldots, m$$

が成立することを意味する．このとき, $f(V) =< Q^{-1}\boldsymbol{w}_1, \ldots, Q^{-1}\boldsymbol{w}_r >$ で, ここに現れるベクトルは, W の基底の一部なので, $\dim f(V) = r = \mathrm{rank}A$.

4.3　商ベクトル空間

4.3.1　同値関係

まず, 同値関係について述べる．これは, 他の講義でも現れることから分かるように, 数学において重要な概念である．集合 M に対して, M の元の対の集合 (直積集合) を $M \times M = \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ と書く．

定義 4.12　$M \times M$ の部分集合 R を M の関係 (relation) という．$(a, b) \in R$ を aRb と書くことにする．

上で, R は部分集合であるが,「関係を表す記号」と捉えて欲しい．

関係の定義は, つまらないものであるが, このように大上段に物事を捉えることも時には必要である．これまでになじみのある関係は, 大小関係を公理化した順序関係である．

定義 4.13　集合 M の関係 $\preceq$ は次を満たすとき, (半) 順序という．

1. 任意の $a \in M$ に関して, $a \preceq a$
2. $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ ならば $a = b$
3. $a \preceq b$, $b \preceq c$ ならば $a \preceq c$

さらに次が成立する時, 全順序という．

- 任意の $a, b \in M$ に対して, $a \preceq b$ または $b \preceq a$ のいずれかが成立する．

例 4.2　1. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の大小関係は, 全順序になる.

2. $a, b \in \mathbb{N}$ に対して, $a \preceq b$ を a は b の約数であると定義すると, これは $\mathbb{N}$ の半順序を定める. この順序では, 2 と 3 は比較できないので, 全順序ではない.
3. 集合の包含関係も半順序であり全順序ではない.

さて, 表題の同値関係であるが, これは「同じ」という概念を公理化した関係である.

定義 4.14　集合 M の関係 $\sim$ が同値関係であるとは, 次が成立することを言う.

1. 任意の $a \in M$ に対して $a \sim a$ (反射律)
2. $a \sim b$ ならば $b \sim a$ (対称律)
3. $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$ (推移律)

例 4.3　1. これまでの数学で現れた $=$(数の一致, 集合の一致など) は, 同値関係である.

2. M を平面内の 3 角形全体の集合とする. この時,「合同」,「相似」は同値関係になる.
3. 問 4.16 1. は, 線形同型が同値関係であることを示している (ベクトル空間全体のなす集合を考えても良いかという問題は, ここでは触れない.).

問 4.18　集合 M の関係で, 定義 4.14 の 2., 3., を満たすが, 1. は満たさない例を作れ.

2.2 節で 2 次曲線の分類をしたとき, 合同なものを同じとして分類した, これは, 同値関係による分類と呼ばれるものの一例である. 2.2 節の分類結果は, 数値的な表現ができると言う意味では良いが, 見た目の図形的には, 主要な 2 次曲線は, 楕円, 放物線, 双曲線の 3 種である. このような大雑把な分類を得るには, 同じの概念 (同値関係) を合同から「座標変換で写り合えるもの」に変更する必要がある. さらに,「射影変換で写り合えるものを同じ」とすると, 全ての 2 次曲線は空間内の円錐と平面の交点で与えられることが示される. (ここに書いた内容は, 雑すぎるので, きちんと知りたい方は射影幾何の本を読んでください.)

また, 問題 4.16 の 4. は, ベクトル空間を同型で分類する時には, 次元を調べれば良いことを示している.

集合 M に同値関係 $\sim$ が定義されているとする. このとき, M の部分集合 $[a] = \overline{a}$ を次で定義する.

$$[a] = \overline{a} = \{b \in M \mid b \sim a\}$$

$[a] = \overline{a}$ を同値関係 $\sim$ に対する a の**同値類**の集合という. a を同値類 $\overline{a}$ の**代表元**という. $b \in \overline{a}$ なら, b も $\overline{a}$ の代表元になることに注意する.

命題 4.2　M を集合, $\sim$ を M の同値関係とする. $a, b \in M$ に対して, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ なら, $\overline{a} = \overline{b}$

証明. $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$ とする. このとき, $c \sim a$ かつ $c \sim b$ なので, $a \sim b$ である. $x \in \overline{a}$ とすると, $x \sim a$ であり, $a \sim b$ より $x \sim b$ である. よって, $x \in \overline{b}$ となり, $\overline{a} \subset \overline{b}$. 逆の包含関係も同様に示されるので, $\overline{a} = \overline{b}$.

M に同値関係 $\sim$ が定義されているとき, 各同値類から代表元を一つずつ選び, それを $\{a_i\}_{i \in I}$ とする (各同値類から代表元が選べることは仮定する (選択公理を仮定する)). このとき上の命題から,

$$M = \bigcup_i \overline{a_i}, \qquad i \neq j \Rightarrow \overline{a}_i \cap \overline{a}_j = \emptyset$$

が成立する. すなわち, M は, 互いに共通部分を持たない $\overline{a}_i$ たちの和集合となる. 互いに共通部分を持たない部分集合の和集合を disjoint union(日本語訳として定着した言葉はないと思う) といい, 上の場合 $M = \bigsqcup_i \overline{a}_i$

の記号を用いる．また, 各同値類から代表元を選んだとき, 代表元の成す集合を**完全代表系**という．

逆に, $M = \bigsqcup_i X_i$ と disjoint union になっているとすると, $a, b \in M$ に対して,

$$a \sim b \Longleftrightarrow a, b \text{ は同じ部分集合の元である．}$$

と定義すると, $\sim$ は同値関係になる．すなわち, 集合 M で同値関係を与えることと, M を disjoint union に分けることは同じである．[*3]

M に同値関係 $\sim$ が定義されており, 完全代表系が $\{a_i\}_{i \in I}$ であるとき,

$$M/\!\sim = \{\overline{a}_i\}$$

と置いて, これを M の同値関係による商集合という．$M/\!\sim$ の元は, M の部分集合であり, $M/\!\sim$ は, M の部分集合を要素とする集合である．この時, 次で決まる写像

$$p : M \to M/\!\sim, \qquad p(a) = \overline{a}$$

を (自然な) 射影 (natural projection) という．

well–defined について

M を集合 $\sim$ を M の同値関係とする．M で定義されたものを商集合 $M/\!\sim$ に持ち込むことが, 今後多く現れる．その際現れる言葉が, 表題に挙げた well–defined (日本語として定着した訳は無い) である．

M で定義されたものを $M/\!\sim$ に持ち込むには, $\overline{a} \in M$ に対して, 代表元 a を用いる．代表元は $\overline{a}$ の元というわけで, 特別な意味はない．そこで, 代表元の取り方によらない, 言い換えると, 代表元を取り替えても同じ結果になる, ということを保証する．このことを well–defined という．

例えば, M' を別の集合とし, 写像 $f : M \to M'$ が定義されているとする．この写像を利用して $\overline{f} : M/\!\sim \to M'$ が定義できるかを問題にする．自然な定義は, $a \in M$ に対して, $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$ とすることである．しかしこれは, $\overline{a}$ という集合全体を $f(a)$ という点に写像していることになる．となると, $\overline{a}$ の全ての点が, $f(a)$ に写される必要がある．すなわち, $b \sim a$ なら $f(b) = f(a)$ が成立することを示さないと, $\overline{f}$ は定義できない．これは, $f(a)$ が $\overline{a}$ の代表元の取り方に依存しないことを証明することになる．

4.3.2 商ベクトル空間

V をベクトル空間, W をその部分空間とする．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して, $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in W$ と定義すると, これは, 同値関係になる．

問 4.19　上が同値関係になることを示せ．

$\mathbb{K}$ を体, V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 W を部分空間とし, $V/\!\sim$ を上で定義された商集合とする．$\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}} \in V/\!\sim$, $a \in \mathbb{K}$ として, $V/\!\sim$ の和とスカラー倍を次で (左辺を右辺で) 定義する．

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}} &= \overline{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}} \\ a\overline{\boldsymbol{u}} &= \overline{a\boldsymbol{u}} \end{aligned}$$

[*3] n 個の元からなる有限集合に対して同値関係が何通り作れるかという場合の数は, Bell 数と呼ばれ, B_n と書かれる．$B_5 = 52$ は, 源氏香と呼ばれる遊びを通じて, 江戸時代の日本でリストアップされた．

これらの和とスカラー倍は, well–defined である．実際 $\boldsymbol{u}' \sim \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}' \sim \boldsymbol{v}$ とすると, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in W$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ で, W が部分空間なので

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}') &= (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in W \\ a\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{u}' &= a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') \in W\end{aligned}$$

となるので, $\overline{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'}$, $\overline{a\boldsymbol{u}} = \overline{a\boldsymbol{u}'}$ となる．

定義 4.15　上の同値関係による商集合 $V/\sim$ を V/W と書き, 上で定義された加法とスカラー倍でベクトル空間とみる．これを, V の W による商ベクトル空間という．

定理 4.3　$\dim V/W = \dim V - \dim W$

証明. $\dim V = n$, $\dim W = k$ とする．$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を W の基底とし, これを拡張して作った V の基底を, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ とする．この時, $\overline{\boldsymbol{w}}_{k+1}, \ldots, \overline{\boldsymbol{w}}_n$ が V/W の基底になる事を示す．

$\overline{\boldsymbol{w}} \in V/W$ とし, $\boldsymbol{w} \in V$ を $\overline{\boldsymbol{w}}$ の代表元とする．$\boldsymbol{w} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{w}_j$ と基底の一次結合で書く．

$$\boldsymbol{w} - \sum_{j=k+1}^{n} a_j \boldsymbol{w}_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \boldsymbol{w}_j \in W$$

なので, V/W において, $\overline{\boldsymbol{w}} = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_j \overline{\boldsymbol{w}}_j$ となり, $\{\overline{\boldsymbol{w}}_{k+1}, \ldots, \overline{\boldsymbol{w}}_n\}$ は, V/W を生成する．

$\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_j \overline{\boldsymbol{w}}_j = \overline{\boldsymbol{o}}$ とすると, V/W の一次結合の定義から, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \overline{a_j \boldsymbol{w}}_j = \overline{\left(\sum_{j=k+1}^{n} a_j \boldsymbol{w}_j\right)} = \overline{\boldsymbol{o}}$ となり, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_j \boldsymbol{w}_j \in W$ となる．V の基底の取り方から, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_j \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{o}$ となり, $a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ となる．よって, $\{\overline{\boldsymbol{w}}_{k+1}, \ldots, \overline{\boldsymbol{w}}_n\}$ は V/W で一次独立になる．従って, $\dim V/W = n - k = \dim V - \dim W$.

定理 4.4（ベクトル空間の準同型定理）　V, W をベクトル空間, $f : V \to W$ を線形写像とすると, 次の自然な同型写像が存在する．

$$\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$$

証明. $\overline{\boldsymbol{v}} \in V/\mathrm{Ker}(f)$ に対して, $\overline{f}(\overline{\boldsymbol{v}}) = f(\boldsymbol{v})$ と定める．これは, well–defined である．実際, $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}'}$ とすると, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Ker}(f)$ なので, $f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{o}$ となり, $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}')$ であり, 代表元の選び方によらず値が定まっている．

商空間の和とスカラー倍の定義から, $\overline{f}$ が線形写像であることは, 明らかである．

$\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると, $\boldsymbol{v} \in V$ が存在して, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる．この時, $\overline{f}(\overline{\boldsymbol{v}}) = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ なので, $\overline{f}$ は全射である．

$\overline{f}$ の単射性は, 問 4.16 3. より, $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{\boldsymbol{o}}\}$ を示せば良い．$\overline{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{Ker}(\overline{f})$ とすると $\overline{f}(\overline{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{o}$ である．このとき, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ となり, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ なので, $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{o}}$ となる．すなわち, $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \{\overline{\boldsymbol{o}}\}$ となり, $\overline{f}$ は単射である．

以上により, 定理は示された．

系 4.1　$f : V \to W$ を線形写像とすると, $\dim V = \dim f(V) + \dim \mathrm{Ker}(f)$

証明. $\dim f(V) = \dim(V/\mathrm{Ker}(f))$, $\dim V/\mathrm{Ker}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f)$ から従う．

4.4 内積とノルム

この節では, $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ とする. ベクトルの大きさを考えるのであるが, (大きさという概念が備わっている)$\mathbb{Q}$ を考えることは, この講義ではほとんどない.

内積

ベクトルの大きさを考えるのに最も理解しやすい方法は, 内積の性質を公理として定義して, それを導入することである.

定義 4.16 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし, V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}$ が次を満たすとき, V 上の (Hermite) 内積という.

1. 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ は非負の実数値で, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ が成立するのは, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の場合に限る.
2. $\overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
3. $(\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $a \in \mathbb{C}$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

Hermite 内積が定義されているとき, $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ を $\boldsymbol{v}$ のノルム (長さ) という.
ふたつのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ のとき, 互いに直交するという.

命題 4.3 $a \in \mathbb{C}$ に対して, $(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

証明.

$$(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{u})} = \overline{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = \overline{a}\overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = \overline{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

注意 4.4

1. 数ベクトル空間の場合と同様, ベクトルのスカラー倍の値が, 一方がそのままで, もう一方が複素共役で現れる. この, 複素共役を前の変数にするか, 後の変数にするかは, 両方の流儀が混在している. この講義では, 線形代数の教科書に従ったが, そうでないことも多い.
2. V が実ベクトル空間の場合, 内積の値も実数値になっている. この場合, 複素共役は現れない.

例 4.4 問 4.5 の記号を用いる. 次は内積を定める.

1. 数ベクトル空間の内積.
2. $M_{m,n}(\mathbb{C})$($m \times n$ 複素行列全体) を考えた時, $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して, $(A, B) = \mathrm{tr}(\overline{{}^tA}B)$
3. $V = \ell^2$ とする. $u = (a_i)$, $v = (b_i) \in \ell^2$ に対して, $(u, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \overline{a}_i b_i$
4. $V = \mathbb{C}[X]$, $V = C^0([a, b])$ の時, $(f, g) = \displaystyle\int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$.

問 4.20

1. 上の例 2. が内積になることを示せ.
2. 上の例 3. が内積を定めること, すなわち, $(a_i), (b_i) \in \ell^2$ なら, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \overline{a}_i b_i < \infty$ を示せ.
3. 上の例 4. が内積になることを示せ.

問 1.9 の性質は, 抽象的なベクトル空間の内積でも成立する. 実際, 問 1.9 の証明には, 内積の具体的な表示

は不要で, 内積の定義に現れた式だけで可能だからである. 改めて, 問 1.9 の内容を定理として述べておく.

定理 4.5　次が成立する.

1. $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}^2|) + \dfrac{i}{2}(|\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}|^2)$
   特に, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ なら, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{w}^2|)$
2. $|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|$　(Cauchy–Schwarz の不等式)
3. $||\boldsymbol{v}| - |\boldsymbol{w}|| \leqq |\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}| \leqq |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|$　(3 角不等式)

定義 4.17　$\{\boldsymbol{v}_i\}$ が内積を持つベクトル空間の正規直交基底 (orthonormal basis) であるとは, 次が成立することを言う.

1. $\{\boldsymbol{v}_i\}$ は V の基底である.
2. $(\boldsymbol{v}_i,\, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$

$\mathbb{K}^n(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ の標準基底は, 標準内積に対して正規直交基底である.

注意 4.5　正規直交基底という概念は, 次元によらず上のように定義できるが, 無限次元でこれが現れることはほぼ無い. 実際, $\ell^2 = \{(a_i)_{i=1,2,\ldots,} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\ \}$ において, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$($i$ 番目だけ 1) とすると, 例 4.4 の内積で, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ である. しかし, $\{e_i\}$ は基底にならない. 実際 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in \ell^2$ であるが, これを e_i の (有限個の) 線形結合で書くことはできない.

Gram–Schmidt の直交化

上の注意にもあるように, 無限次元で基底を考えるのは難しいので, 有限次元に話を限る.

V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が与えられた時, これから正規直交基底を作り出す組織的な方法が Gram–Schmidt の直交化と呼ばれるものである. アルゴリズムとしては, 次の帰納的な方法である.

1. $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)}}$ とする.

2. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ から正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ を作ったとき,
$$\boldsymbol{v}'_{k+1} = \boldsymbol{v}_{k+1} - (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - \cdots - (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{u}_k$$
   と置くと, $\boldsymbol{v}'_{k+1} \neq \boldsymbol{o}$, $(\boldsymbol{v}'_{k+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$, $(i = 1, \ldots, k)$ が成立するので,
$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{v}'_{k+1}}{|\boldsymbol{v}'_{k+1}|} = \frac{\boldsymbol{v}'_{k+1}}{\sqrt{(\boldsymbol{v}'_{k+1}, \boldsymbol{v}'_{k+1})}}$$
   とする.

問 4.21　$P_2(\mathbb{C}) = \{ax^2 + bx + c \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{C}\}$ を複素数係数の 3 次以下の多項式がなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. $P_2(\mathbb{C})$ の基底 $\{1,\, x,\, x^2\}$ を次の内積に対して Gram–Schmidt の直交化を施せ.

1. $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$ (結果は, Legendre(ルジャンドル) の多項式の定数倍)
2. $(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2} dx$ (Hermite の多項式の定数倍)

注意 4.6 上の問 4.21 の様に, 多項式の空間に様々な内積を定義することができる (多くは積分を利用して). その際に直交する多項式の列を得るが, これらは直交多項式系と呼ばれ, 様々な応用がある.

定義 4.18 V, W を内積を持つベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする. 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ が成立するとき, 等長線形写像という. さらに, f が全単射なら, 等長同型という.

内積を持つ n 次元ベクトル空間 V に正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を定めると, $\boldsymbol{v} \in V$ の基底に対する座標を $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ とすると, 対応

$$V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

は, V から標準内積を入れた $\mathbb{K}^n$ への等長写像を定める.

$f : V \to W$ が等長線形写像なら, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $|f(\boldsymbol{u})| = |\boldsymbol{u}|$ が成立する. これが等長という言葉の由来である. ただし, 任意の $\boldsymbol{u}$ に対して $|f(\boldsymbol{u})| = |\boldsymbol{u}|$ (等長という文字からするとこちらを定義にしたい) が成立するとき, 写像 f が等長線形写像になるかということに関しては, 実ベクトル空間では成立するが, 複素ベクトル空間では反例がある.

問 4.22 1. 等長線型写像は単射であることを示せ.

2. $\mathbb{C}^n$ に自然な内積を入れて, $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を写像とする. $|f(\boldsymbol{u})| = |\boldsymbol{u}|$ が任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ について成立するが, 線形写像ではないものの例を与えよ.

定義 4.19 **(直交補空間)** V を内積 (,) を持つベクトル空間とし, W を部分空間とする. このとき,

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0, \ \forall \boldsymbol{w} \in W\}$$

を W の直交補空間という.

次の命題の証明は, 数ベクトル空間と全く同じである.

命題 4.4 V が有限次元ベクトル空間で, $W \subset V$ を部分空間とすると, $V = W \oplus W^{\perp}$.

注意 4.7 上で, 有限次元という仮定は重要である. 無限次元では, 上は成り立たない. 実際, $V = \ell^2$ として, $e_i \in \ell^2$, $i = 1, 2, \ldots$ を注意 4.5 の元とし, $W = < \{e_i\}_{i=1,\,2,\ldots} >$ とする. このとき $W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$ となる. しかし, 注意 4.5 のように, $W \neq \ell^2$ である.

問 4.23 命題 4.4 の証明を書け.

上のように無限次元では, 代数的な議論 (有限和だけで収束を考えない議論) では, うまくいかない事が多く, 収束の概念を定義して無限和も考える事が多い.

対称変換, Hermite 変換, ユニタリ変換, 直交変換

定義 4.20 V を内積 $(\ ,\ )$ を持つベクトル空間とし, $T: V \to V$ を V の線形変換とする.

1. 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $(T^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})$ が成立するとき, 写像 $T^*: V \to V$ を T の随伴 (adjoint) という.
2. V が実ベクトル空間で, $(T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について成立するとき, T を対称変換という.
3. V が実ベクトル空間で, $(T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について成立するとき, T を直交変換という.
4. V が複素ベクトル空間で, $(T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について成立するとき, T を Hermite 変換 (あるいは, 自己共役, self-adjoint) という.
5. V が複素ベクトル空間で, $(T\boldsymbol{u}, T\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について成立するとき, T をユニタリ変換という.

問 4.24 T の随伴 T^* は線形写像になる事を示せ.

問 4.25 複素係数の多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ に内積を $(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2} dx$, f, $g \in \mathbb{C}[x]$ で定義するとき, $T(f) = f'' - 2xf'$ は Hermite 変換になることを示せ.

上の定義の言葉遣いは, 有限次元ベクトル空間のときに用いられる言葉であるが, 無限次元の場合, 変換ではなく「作用素 (operator)」という言葉が用いられる.

ノルム

上で述べたように, 内積を持てば長さを決めることができるが, 内積が自然に定義できないベクトル空間でも長さを考えたいことがある. 「ベクトルの長さ」を公理化したものが, これから定義するノルム (norm) である.

定義 4.21 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし, V から $\mathbb{R}$ への写像 $\boldsymbol{v} \mapsto ||\boldsymbol{v}||$ が次の性質を満たすとき, ノルム (norm) という.

1. $||\boldsymbol{v}|| \geqq 0$ で, $||\boldsymbol{v}|| = 0$ となるのは, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ のときに限る.
2. $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $||a\boldsymbol{v}|| = |a|\,||\boldsymbol{v}||$.
3. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して, $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}|| \leqq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{w}||$ (3 角不等式).

注意 4.8 $||\boldsymbol{v}|| \geqq 0$ は他の公理から導出できる. 実際, 次を見れば良い.

$$0 = ||\boldsymbol{o}|| = \left|\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right|\right| \leqq \left|\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right|\right| + \left|\left|-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right|\right| = \frac{1}{2}||\boldsymbol{v}|| + \frac{1}{2}||\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{v}||$$

しかし, ノルムの正値性を強調する意味で, 通常は公理に書かれる.

内積が定義された空間では, 内積から定まるベクトルの大きさ (長さ) はノルムの公理を満たす. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき, 内積から決まるノルムの事を, ユークリッドノルムと言う. しかし, そのような空間でも別のノルムを考

えることもある. さらに, 内積が定義されていなくとも, ノルムが定義できる空間もある.

問 4.26（ノルムの例） 問 4.5 の記号を用いる. 次は, 与えられた空間のノルムである事を示せ.

1. $V = \mathbb{K}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_i)$ に対して, $||\boldsymbol{x}||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
2. $V = \mathbb{K}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_i)$ に対して, $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_i\{|x_i|\}$
3. (行列の作用素ノルム) $V = M_{m,n}(\mathbb{K}) \ni A$ に対して, $||A|| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\, |\boldsymbol{x}|=1} |A\boldsymbol{x}|$. ここで, $|\boldsymbol{x}|$, $|A\boldsymbol{x}|$ はそれぞれ, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ 内積から定まるノルム ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$).
4. $\ell^\infty \ni \boldsymbol{v} = (a_i)$ に対して, $||\boldsymbol{v}||_\infty = \sup_i |a_i|$
5. $\ell^1 \ni \boldsymbol{v} = (a_i)$ に対して, $||\boldsymbol{v}||_1 = \sum_i |a_i|$
6. $L^\infty([a,b]) \ni f$ に対して, $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

V にノルム $||\ ||$ が定義されると, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して, $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}||$ とおくと, d は V に距離を定め, V は距離空間になる (幾何序論で距離空間は講義されると思う). これにより,「ベクトル列の収束」などが定義され, 解析学に応用される. これについては, この講義の範疇を超えるので, これ以上は述べない.

注意 4.9 符号理論で現れる有限体上のベクトル空間においても, 内積や距離の概念が定義され, 誤り訂正符号等に応用される. 但し, それらは, これまでの定義とは微妙にずれた定義になる.

5 多重線形写像

$\mathbb{K}$ を可換体とし, $V_1, \ldots, V_n$, W を K 上のベクトル空間とする.

定義 5.1 $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ が n 重線形であるとは, 各変数について線形写像になる事を言う. すなわち,

$$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, a\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = af(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$
$$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

が任意の $a \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}'_i \in V_i$ について成立する写像である.

n 重線形写像全体の集合は, 自然な和とスカラー倍で $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる. これは, テンソル積と呼ばれる空間で, 上の写像全体の集合は, $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$ と書かれる空間と同一視できる. テンソル積については, (時間があれば) 後期の講義で述べる. ここでは, これまでの線形代数学とこの講義で現れた多重線形写像について述べる.

以下では, $V_1 = \cdots = V_n = V$ で, $W = \mathbb{K}$ の場合のみを考える. このような写像は「形式」と呼ばれる.

定義 5.2 m 重線形写像 $V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$ を V の m 形式と言う事にする. $T^m(V^*)$ を V 上の m 形式全体のなすベクトル空間とする. $T^m(V^*)$ の零ベクトル (零写像) は, 数字の 0 を用いる事にする. f を m 形式とし, σ を $\{1, \ldots, m\}$ の置換とする.

1. 任意の置換に対して, $f(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(m)}) = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ が成立するとき, f を対称形式と言う. $S^m(V^*)$ を V 上の対称 m 形式全体の成すベクトル空間とする.

2. 任意の置換に対して, $f(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(m)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ が成立するとき, f を交代形式と言う. $A^m(V^*)$ を V 上の交代 m 形式全体の成すベクトル空間とする.

注意 5.1 1. ここまでの定義で, V^* という記号が出てくるが, 下に述べる双対空間の意味である. 対称形式, 交代形式は, それぞれ双対空間 V^* の対称テンソル, 交代テンソルというものの定義であると考えても良い.

2. 対称形式全体, 交代形式全体は, それぞれに積を定義することができ, それぞれ, 対称代数, 外積代数と呼ばれるものになる. 対称代数は, V 上の多項式函数全体と同じものになる.

問 5.1 交代形式では, 異なる場所に同じベクトルを代入すると値は 0 となる. すなわち, f を交代形式とすると,

$$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{w}, \ldots \boldsymbol{w}, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = 0$$

が成立する事を示せ.

5.1 双対空間

もっとも易しい形式は, $m = 1$ の場合である.

定義 5.3 $V^* = \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ は線形写像 }\} = T^1(V^*)$ を V の双対 (そうつい)[*4] 空間 (dual space) と言う.

定理 5.1 V を n 次元ベクトル空間とし, $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の基底とする. $\boldsymbol{f}_i \in V^*$ を

$$\boldsymbol{f}_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) = x_i$$

で定めると, $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ は V^* の基底になる. 特に $\dim V^* = n$ である.

証明. まず, $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ が一次独立である事を示す.

$$a_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{o}, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

とする. ここで, V^* の零ベクトルは零写像, すなわち, $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{v}) = 0, \forall \boldsymbol{v} \in V$ となる元であることに注意する. $j = 1, \ldots, n$ に対して, 両辺に $\boldsymbol{e}_j$ を代入すると, $a_j = 0$ を得るので, $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ は一次独立である.

$\boldsymbol{f} \in V^*$ とし, $f(\boldsymbol{e}_i) = a_i$ とする. $\boldsymbol{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ とすると, $\boldsymbol{f}$ の線形性から,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{f}_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{v})$$

を得る. 上の式は, $\boldsymbol{f} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{f}_i$ を表しているので, $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ は V^* を生成する.

定理 5.2（有限次元ベクトル空間の双対性） V を有限次元ベクトル空間とするとき, ベクトル空間の自然な同型 $V^{**} \cong V$ が存在する.

---

*4 そうたいという読みも間違いではないと思うが, 数学の世界では, そうついと読むのが通常.

証明. $\varphi : V \to V^{**}$ を

$$\varphi(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{f} \in V^*$$

で定義する．$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ とすると，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{f} \in V^*$ について成立する．とくに, V^* の基底についてこの式が成立するので, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となり φ は単射である．上の定理 5.1 より, $\dim V = \dim V^*$ なので, φ は同型写像になる．

上の 2 つの定理において, V が有限次元であるということは本質的である (次の問)．また, 双対性の証明において, ベクトル空間の同型写像が, 双対空間の定義だけから定まっていることにも注意する．このように, 定義だけから定まる性質のことを「自然な」という形容詞をつけることがある．双対性の証明に現れる同型写像 φ は,「自然な同型写像」と言われる．

問 5.2 $\{V_i\}_{i\in I}$ をベクトル空間の族とするとき, $\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right)^* \cong \prod_{i\in I} V_i^*$ が成立することを示せ．

問 5.3 V を n 次元ベクトル空間, V^* をその双対空間とする．$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を V の基底, $\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n$ をその双対基底とする．$\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n$ を別の V の基底, $\boldsymbol{f}'_1, \dots, \boldsymbol{f}'_n$ それに対応する双対基底とし, $\boldsymbol{e}'_k = \sum_{i=1}^n p_{ki}\boldsymbol{e}_i$, $P = (p_{ki})$ を基底の変換行列とする．このとき, $\boldsymbol{f}'_k = \sum_{i=1}^n q_{ki}\boldsymbol{f}_i$, $Q = (q_{ki})$ を V^* での基底の変換行列とするとき, $Q = {}^tP^{-1}$ が成立する事を示せ．(この Q の事を P の反傾 (contragradient) という.)

V の部分空間 $W \subset V$ に対して,

$$W^T = \{f \in V^* \mid f(\boldsymbol{w}) = 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in W\ \}$$

と定義する．これは, V^* の部分空間になる．W^T を W の零化空間という．

問 5.4 W^T が部分空間になる事を示せ．

定理 5.3 V を有限次元とする．次が成立する．

1. $\dim W^T = \dim V - \dim W$
2. 定理 5.2 を用いて $V^{**} = V$ と見たとき, $(W^T)^T = W$
3. 自然な同型, $W^* \cong V^*/W^T$, $(V/W)^* \cong W^T$ が存在する．

証明. 1. $\dim V = n$, $\dim W = r$ とする．$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r$ を W の基底とし, これを拡張してできる V の基底を $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ とし, これに対応する V^* の双対基底を $f_1, \dots, f_n$ とする．$f = \sum_{i=1}^n c_i f_i \in V^*$ に対して， $f \in W^T$ であることと, $f(\boldsymbol{e}_i) = c_i = 0$, $i = 1, \dots, r$ が成立することは同値になる．よって,

$$W^T = \left\{ \sum_{i=r+1}^n c_i f_i \mid c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

となり, $f_{r+1}, \dots, f_n$ が W^T の基底になる． 特に, $\dim W^T = n - r = \dim V - \dim W$ となる．

2. 定義から, $(W^T)^T = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = 0, \forall f \in W^T \,\}$ である．W^T の定義と上の式から, $W \subset (W^T)^T$ が直ちにわかる．一方, 1. を利用すると, $\dim(W^T)^T = \dim V - \dim W^T = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$ となるので, $(W^T)^T = W$ である．

3. $\varphi : V^* \to W^*$ を $f \in V^*$ に対して $\varphi(f) = f_{|W}$ (f を W に制限した写像) とする．1. の証明で用いた双対基底を利用すると，$W^* =< f_1, \ldots, f_r >$ なので，φ は全射である．$\mathrm{Ker}(\varphi) = W^T$ であることも定義から直ちに従うので，準同型定理 (定理 4.4) より，$V^*/W^T \cong W^*$.

$\psi : W^T \to (V/W)^*$ を $\psi(f)(\overline{\boldsymbol{v}}) = f(\boldsymbol{v})$, $f \in W^T$, $\overline{v} \in V/W$ で定める．V/W で $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}'}$ が成立すると，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ となるが，$f \in W^T$ なので，$f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = 0$ となり，$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}')$ だから，$\psi(f)$ は V/W 上の関数として well-defined である．$\psi(f)$ が V/W 上の線形写像になること，および ψ が線形写像になることは明らか．$\psi(f) = 0$ とすると，$f(\boldsymbol{v}) = 0$ が全ての $\boldsymbol{v} \in V$ について成立するので，$f = 0$ となり，$\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$ となるので，ψ は単射である．$\dim(V/W)^* = \dim V/W = \dim V - \dim W = \dim W^T$ が成立するので，ψ は線形同型写像である．

5.2 行列式

$n \times n$ 行列を列ベクトルの並びで表す．$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$．このとき，$\det A$ を $\mathbb{K}^n$ の n 個のベクトルの写像 $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と思うと，これは，交代形式 $V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$ である．すなわち，$\det \in A^n((K^n)^*)$ と考えることができる．

定理 5.4 $f \in A^n((K^n)^*)$ とすると，定数 $C \in \mathbb{K}$ が存在して，$f = C \det$ (i.e. 行列式の定数倍) である．

証明. $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とし，$\boldsymbol{a}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ とする．$f \in A^n(\mathbb{K}^n)$ とし，$C = f(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とする．このとき，

$$f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1\,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \ \ldots, \ \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n\,n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} a_{i_1\,1}a_{i_2\,2}\cdots a_{i_n\,n} f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})$$

ここで，$\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}$ に同じ元があれば，$f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$ (問 5.1) なので，上の和は，$i_1, \ldots, i_n$ が $1, \ldots n$ の置換の場合だけが現れる．$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ を置換とすると，f の交代性から $f(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \mathrm{sgn}(\sigma)C$ となり，

$$f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = C\sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = C\det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$$

を得る．

上の定理は，$\dim V = n$ とすると，$\dim A^n(V^*) = 1$ である事を示している．

問 5.5 $\dim V = n$ とする．V の基礎体 $\mathbb{K}$ の標数が 0 のとき (4.1 節を参照)，次を示せ．

1. $\dim T^m(V^*) = n^m$
2. $\dim A^m(V^*) = \dbinom{n}{m} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$
3. $\dim S^m(V^*) = \dbinom{n+m-1}{n-1}$

5.3 双線形形式

$m=2$ のとき, 2 形式は双線形形式と呼ばれる. 多重線形形式を扱う場合, 基礎体 $\mathbb{K}$ の性質が問題になる ($m \geqq 2$ の場合).

双線形形式では　$\mathrm{char}\mathbb{K}=2$ の体 (例えば $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) は, 少し特別扱いしなければならない. この場合, $-1=1$ が成立し対称形式と交代形式の区別ができなくなる. ここでは, この事に注意しながら, 双線形形式と 2 次形式について解説する. 以下, ベクトル空間 V は有限次元とし, その次元を n とする.

$T^2(V^*)$ を V 上の双線形形式 (2 形式) 全体のなす集合とする. $B \in T^2(V^*)$ とする.

$\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を V の基底とする. $b_{ij}=B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ とし, $n \times n$ 行列 M_B を $M_B=(b_{ij})$ で定義する. M_B を双線形形式 B の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対する行列表示という. この基底を用いて, $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^n y_i\boldsymbol{e}_i$ と座標を導入すると, 双線形形式は, 次のように行列の積で書ける.

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_iy_j={}^t\boldsymbol{x}M_B\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

V の別の基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$ に対して, $B(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j)=\beta_{ij}$ とする. 基底変換が $\boldsymbol{e}'_i=\sum_{i=1}^n p_{ji}\boldsymbol{e}_j$ であるとすると,

$$\beta_{ij}=B(\sum_{i=1}^n p_{ki}\boldsymbol{e}_k, \sum_{l=1}^n p_{lj}\boldsymbol{e}_l)=\sum_{k,l=1}^n p_{ki}b_{kl}p_{lj}$$

を得る. $P=(p_{ij})$ とすれば, 上を行列表示すると $(\beta_{ij})={}^tPM_BP$ となる. これが座標変換に対する行列表示の変換規則である. 特に, $\det P \neq 0$ なので, $\det M_B$ が 0 であるか否かは基底の選び方によらない.

双線形形式 B に対して, 次の 2 つの線形写像が定義される.

$$\begin{aligned} &l_B : V \to V^*, \quad l_B(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ &r_B : V \to V^*, \quad r_B(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \end{aligned}$$

定理 5.5　上の記号のもとで, 次は同値である.

1. $\det M_B \neq 0$
2. l_B は線形同型である.
3. r_B は線形同型である.
4. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{y} \in V$ が存在して $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0$
5. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{y} \in V$ が存在して $B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \neq 0$

証明. M_B の定義に用いた V の基底を $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ とし, この基底を用いて, V と $\mathbb{K}^n$ を同一視する. $\det M_B=0$ である事と, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ で $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ かつ $M_B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ となるものが存在する事は, 同値になる. 座標を用いた表示で, $B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{y}M_B\boldsymbol{x}$ だから, これは $\mathrm{Ker}(r_B) \neq \{\boldsymbol{o}\}$ と同値であり, 5. の否定命題とも同値である. $\dim V=\dim V^*$ を利用すると, これは, r_B が同型でないことと同値である. 対偶を考えると, 1., 3., 5 の同値性が成立する. 1., 2., 4., の同値性も同様に示される.

定義 5.4　定理 5.5 のどれかが成立する時, $B \in T^2(V^*)$ は非退化 (nondegenerate) であるという. そうでないとき退化 (degenerate) しているという.

次の定理は, 行列表示 M_B を考えると, 問 2.1 1. の別表現でもある.

定理 5.6　$2 \neq 0$ とすると, $B \in T^2(V^*)$ に対して, 対称形式 S と交代形式 A が一意的に存在して, $B = S + A$ となる. 特に $2 \neq 0$ のとき, ベクトル空間として, $T^2(V^*) = S^2(V^*) \oplus A^2(V^*)$.

証明. $2 \neq 0$ を仮定しているので, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して次が成立する.

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{2} + \frac{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{2}.$$

ここで, $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{2}$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}{2}$ とおくと, S は対称形式, A は交代形式である.

S, S' を対称形式, A, A' を交代形式として,

$$B = S + A = S' + A'$$

と 2 通りに書けたとすると, $S - S' = A' - A$ が成立する. このとき, 左辺は対称形式, 右辺は交代形式で, $2 \neq 0$ なので両辺は 0 となり, $S = S'$, $A = A'$ が成立する.

$2 = 0$ のときは, 素朴な定義では, $S^2(V^*) = A^2(V^*)$ となるので, 上のような直和分解はできない. 実際には, $2 = 0$ のときは交代形式の定義が少し変更される. ただし, この特別な変更を行なっても, 上のような直和分解は無い.

定義 5.5　B をベクトル空間 V 上の双線形形式とする.

1. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して,

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$$

　　が成立するとき, **反射的**であるという.

2. B を反射的な双線形形式とするとき, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が成立する $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ は互いに直交するという.

問 5.6　$V = M_n(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ を成分とする n 次正方行列全体のなすベクトル空間とする.

1. $B(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, A, $B \in V$ は双線形形式になることを示せ.
2. 上の B は非退化であることを示せ.
3. $n \geqq 2$ のとき B は反射的であるか否かを判定せよ.

対称双線形形式, 交代双線形形式はともに反射的である. 「直交する」という言葉遣いは, $\mathbb{R}$ 上の内積で現れる言葉遣いの流用であるが, 角度が定義されているわけではない. 反射的でない場合も, 「直交する」と言う言葉遣いをしても良いのだが, 「互いに」と言う言葉が無効になるので, そのような事を考える事は少ない.

以下, 反射的な双線形形式に話を限る. B をベクトル空間 V 上の反射的な双線形形式とし, W を V の部分空間とする.

$$W^o = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in W \,\}$$

と置く．すなわち全ての W の元と直交するベクトル全体のなす集合である．W は V の部分空間となることが直ちにわかる．W^o を W の直交部分空間という．とくに, V の直交部分空間

$$V^o = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in V \,\}$$

を B の根基という．

問 5.7　W^o が部分空間になることを示せ．

命題 5.1　B をベクトル空間 V の反射的な双線形形式とし, V^o を B の根基とする．B が非退化であるための必要十分条件は $V^o = \{\boldsymbol{o}\}$ である．

証明. V^o の定義と B の反射性から,

$$V^o = \mathrm{Ker}(l_B) = \mathrm{Ker}(r_B)$$

が成立する．従って非退化の定義より, 命題が成立する．

命題 5.2　B をベクトル空間 V の反射的な双線形形式とし, V^o を B の根基とする．このとき, $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}} \in V/V^o$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ に対して $\widetilde{B}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とすると, $\widetilde{B}$ は V/V^o 上の非退化な反射的双線形形式を定義する．

証明. $\widetilde{B}$ が well-defined であることは, 問とする．$\boldsymbol{x} \in V$ として, $\widetilde{B}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) = 0$ が任意の $\overline{\boldsymbol{y}} \in V/V^o$ に対して成立するとする．このとき, $\widetilde{B}$ の定義から $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ について成立するから, $\boldsymbol{x} \in V^o$ となり, $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{o}}$ となって $\widetilde{B}$ は V/V^o 上非退化になる．

問 5.8　上の $\widetilde{B}$ が well-defined であることを示せ．

定理 5.7　$B \in T^2(V^*)$ が反射的なら, B は交代形式もしくは対称形式になる．

上の定理の証明の前に, 次の補題を示す．

補題 5.1　V を有限次元ベクトル空間, f, $g \in V^*$ を 0 でない二つの元とする．$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ となる必要十分条件は, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ が存在して, $g = af$ である．

証明. $a \neq 0$ に対して, $g = af$ なら, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ は明らかである．$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ とする．f, g は共に 0 ではないので, $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - 1$ である (c.f. 定理 5.3, 1.)．$\boldsymbol{e}$ を $\mathrm{Ker}(f)$ の補空間の基底とすると, $f(\boldsymbol{e}) = \alpha$, $g(\boldsymbol{e}) = \beta$ とすると, $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ である．$a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおく．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{e} + \boldsymbol{w}$, $k \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(f)$ と書け, $g(\boldsymbol{x}) = k\beta = k\dfrac{\beta}{\alpha}\alpha = af(\boldsymbol{x})$ となるので, 証明を得る．

定理 5.7 の証明. まず, B が非退化であると仮定する． このとき, 定理 5.5 より, r_B, l_B は線形同型写像になることに注意する．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ に対して, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ が成立することから, $\mathrm{Ker}(r_B(\boldsymbol{x})) = \mathrm{Ker}(l_B(\boldsymbol{x}))$ が $\boldsymbol{x} \in V$ について成立する． 上の補題から, ある $a(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{K}$ が存在して, $r_B(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})l_B(\boldsymbol{x})$ となる．この時, 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して,

$$\begin{aligned} r_B(\lambda\boldsymbol{x}) &= a(\lambda\boldsymbol{x})l_B(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda a(\lambda\boldsymbol{x})l_B(\boldsymbol{x}) \\ &= \lambda r_B(\boldsymbol{x}) = \lambda a(\boldsymbol{x})l_B(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

が成立する．r_B, l_B の単射性より, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ なら, $r_B(\boldsymbol{x}) \neq 0$, $l_B(\boldsymbol{x}) \neq 0$ なので, $a(\lambda\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})$ が成立する．

同様に, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ を一次独立なベクトルとすると,

$$\begin{aligned} r_B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})l_B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\left(l_B(\boldsymbol{x})+l_B(\boldsymbol{y})\right) \\ &= r_B(\boldsymbol{x})+r_B(\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x})l_B(\boldsymbol{x})+a(\boldsymbol{y})l_B(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるので,

$$(a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-a(\boldsymbol{x}))l_B(\boldsymbol{x})+(a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-a(\boldsymbol{y}))l_B(\boldsymbol{y})=0$$

を得る. l_B が同型であることと, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一次独立性から, $l_B(\boldsymbol{x})$, $l_B(\boldsymbol{y})$ は一次独立になるので,

$$a(\boldsymbol{x})=a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a(\boldsymbol{y})$$

を得る. これらのことから, $a(\boldsymbol{x})$ は V の元 $\boldsymbol{x}$ によらない定数であることがわかる. すなわち, $r_B = kl_B$, $k \in \mathbb{K}$. このとき,

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=r_B(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})=kl_B(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x})=kB(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

が成立するから, B の値は変数の入れ替えで, k 倍される. もう一度入れ替えると, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k^2B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ となる. $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0$ となる $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を選ぶと $k^2=1$ を得るので, $k=\pm 1$ となり, B は対称形式か交代形式になる.

B が退化する場合, V^o の補空間 V' をひとつ取る. $V' \cap V^o = \{\boldsymbol{o}\}$ なので, B の V' への制限は非退化な反射的双線形形式になる. よって上の議論から, 任意の $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}' \in V'$ に対して, $B(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')=\varepsilon B(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{x}')$ $(\varepsilon=\pm 1)$ が成立する. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ は, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V^o$ となるので,

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{v})=B(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')=\varepsilon B(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{x}')=\varepsilon B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

となり, B は対称形式または交代形式である.

反射的でない双線形形式で, 数学的に重要であるものは, あまり知られてないと思われる[*5]. 以下では, 反射的な双線形形式とそれに関連する 2 次形式の定義を紹介して, この講義を締め括ることにする.

交代双線形形式

$2=0$, すなわち $-1=1$ となる体では, 定理 5.6 が成立しない. このような体に対しても統一的に交代双線形形式を定義するのだが, そのためには, 次の事を反映させる.

命題 5.3 $\mathbb{K}$ を $2 \neq 0$ となる体とし, V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間, B を V の双線形形式とする. このとき, B が交代形式であるための必要十分条件は, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となることである.

証明. B が交代双線形形式なら, 変数の入れ替えを利用すると, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ なので, $2B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となり, $2 \neq 0$ なので, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ である.

逆に, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ とすると, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ に対して,

$$0=B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

となり, $B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

[*5] 少なくとも, 私は知らない. ただし, 今後反射的でない双線形形式で重要な対象が現れるかもしれない.

定義 5.6　V をベクトル空間とする．双線形形式 B が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ とき, V 上の交代双線形形式であるという．

$2 \neq 0$ なら上の命題で見たように, この定義は, 素朴な交代形式の定義と一致する．$2 = 0$ の場合, $-1 = 1$ なので上の命題の証明から, 交代形式は対称形式になる．しかしこの場合, 対称形式が交代形式になるとは限らない．例えば, $\dim V = 1$ のとき, 交代形式は 0 のみとなるが, 対称形式は 0 でないものが存在する．すなわち, $2 = 0$ の場合, 交代形式は対称形式の部分集合となる．

問 5.9　$\dim V = 1$ なら, 交代形式は 0 だけであることを示せ．

非退化な交代形式に対しては, 次が成立するが, 証明は省略する (それほど難しいわけではない).

定理 5.8
1. $V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ とするとき, 非退化な交代形式が存在するための必要十分条件は, $\dim V$ が偶数であることである．
2. $\dim V = 2n$, $n > 0$ として, A を V 上の非退化な交代形式とする．このとき, V 上の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ で,
$$A(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_j) = 0, \quad A(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij}$$
を満たすものが存在する．

上の定理は, 偶数次元のベクトル空間には, 非退化な交代形式が本質的に一通りだけ存在することを述べている．定理 5.8, 2. の基底は, シンプレクティック (symplectic) 基底, あるいは斜交基底と言う[*6]．この基底に対する A の行列表示は, $\begin{pmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{pmatrix}$ で与えられる．

対称双線形形式と 2 次形式

$2 = 0$ の場合も込めて統一的な議論をするには, 対称双線形形式より 2 次形式の方が, 現状では自然な対象である事が分かっている (例えば, 有限単純群の分類に現れる Chevalley(シュバレー) 群の理論.)．対称双線形形式はすでに定義されているので, 2 次形式の定義を与える．下の定義では, $2 = 0$ の場合も含まれる．

定義 5.7　V をベクトル空間とするとき, $Q : V \to \mathbb{K}$ が V 上の 2 次形式であるとは, 次を満たす事を言う．

1. $Q(a\boldsymbol{x}) = a^2 Q(\boldsymbol{x})$, $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$
2. $B_Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = Q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - Q(\boldsymbol{x}) - Q(\boldsymbol{y})$ は, V 上の対称双線形形式になる．

$2 \neq 0$ とする．このとき, 2 次形式 Q に対して, $Q(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2} B_Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成立する．逆に, 対称双線形形式 B に対して, $Q_B(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2} B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ とおくと, これは 2 次形式になり, $B_{Q_B} = B$ が成立する．すなわち, $2 \neq 0$ なら, 対称双線形形式と 2 次形式は, 1 対 1 に対応する．また, この対応を通じて, 対称双線形形式と 2 次形式を同一視する．この場合, 対称双線形形式の方が扱いやすく, それを調べることで 2 次形式の性質を理解することができる．

$2 = 0$ が成立するとき, 上のような 2 次形式と双線形形式の対応はうまくいかない．$B_Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ が常に成立するので, 対応する双線形形式は交代形式になる．また, 最も簡単な $\dim V = 1$ のときの $Q(x) = ax^2$,

[*6] 物理系の書物では, 正準基底 (canonical base) と書いてあるかも知れない

($a \neq 0$) を与える双線形形式は, $B(x, y) = axy$ と考えるのが自然であるが, それを Q だけからうまく取り出す方法が無い. $2 = 0$ の場合も, 対称双線形形式の扱いやすいのであるが, 2 次形式の方が良い性質を持つことが知られている.

2 次形式, あるいは対称双線形形式の分類は, 交代形式の分類 (定理 5.8) のように簡単な結果にはならない. Sylvester の慣性則 (定理 2.5) は $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときの分類結果である. Sylvester の慣性則には, 2 次形式 (あるいは双線形形式) の分類には, ベクトル空間の次元だけでなく, $\mathbb{K}$ の性質が必要であることが現れている. その性質とは,「$\mathbb{K}$ の中でどの程度平方根が取れるか?」というものである. 群論的には, 体の乗法群に対する剰余群 $\mathbb{K}^\times/(\mathbb{K}^\times)^2$ ($\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$) の性質である. 2 次形式 (対称双線形形式) の分類を詳しく述べるのは大変なので, 気になる人は, 例えば [7] を参照してください.

参考文献

[1] 小林正典, 寺尾宏明著, 線形代数講義と演習, 培風館.

[2] 砂田利一著, 行列と行列式 (現代数学への入門), 岩波書店.

[3] 佐武一郎著, 線型代数学 (新装版), 数学選書 1, 裳華房.

[4] 齋藤正彦著, 線型代数入門, 東京大学出版会.

[5] 松坂和夫著, 線型代数, 入門数学入門シリーズ 2, 岩波書店.

[6] 西山享著, 幾何学と不変量, 日本評論社.

[7] 田坂隆士著, 2 次形式, 岩波基礎数学選書, 岩波書店.

この講義ノートを作るにあたって参考にした書籍, および本文内で参照した書籍である. これら以外にも, 良書は沢山ある.