2015 年度代数学 II 期末試験

・配った裏紙は, 解答用紙件計算用紙です. 終了時に必要な部分だけ提出してください.

・提出予定の解答用紙 (裏紙) には学籍番号・氏名を記入してください.

・解答用紙は, どのように使っても構いません.

問 1. (2016 年センター試験, 数学 II, 第 4 問 (2) より出題)
$P(X) = X^3 - 2X^2 + qX + 2r$ とする. 次に答えよ.

1. $P(X) = 0$ が -2 と 2 つの自然数解 α, β ($\alpha < \beta$) を持つとき, q, r, α, β を求めよ. (10 点)

2. 上のとき, P の判別式の値を求めよ. (10 点)

問 2. (2016 年センター試験, 数学 II, 第 4 問 (1) より出題)
$\mathbb{Q}$ 上の方程式, $X^4 + 2X^2 + 25 = 0$ を考える. 次の問に答えよ.

1. $X^4 + 2X^2 + 25$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ. (10 点)

2. $X^4 + 2X^2 + 25$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{B})$ ($B \in \mathbb{Q}$) で, 既約な 2 次式の積に分解するとき, B を求めよ (解は 3 つある). (15 点)

3. この方程式の根をすべて求めよ. (10 点)

4. この方程式の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群を求め, そのすべての部分群と Galois 対応によって対応する体を記述せよ. (15 点)

問 3. ω を 1 の原始 3 乗根とするとき, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \omega)$ を示せ. (15 点)

問 4. $K = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ とするとき, 体の拡大 M/K, L/M は Galois 拡大であるが, L/K は Galois 拡大でないことを示せ. (15 点)

問 5. $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を 4 次多項式とするとき, $D(f) > 0$ ($D(f)$ は f の判別式) となるが, $f(X) = 0$ は虚数解を持つような例を与えよ. (15 点)