2015 年度代数学 I 期末試験　　(小問も込めて, 1 題 10 点で採点します. 目標は 60 点)

・解答用紙 (A3 白紙) に学籍番号・氏名を記入してください.

・解答用紙は, どのように使っても構いません. 解答用紙は, 裏面も使ってください.

・裏紙は, 計算用紙, 下書き用紙として使ってください.

以下, 環はすべて単位元を持つ可換環とする.

問 1. 環において $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $(-1)(-1) = 1$ が成立することを示せ.

問 2. 有限個の元からなる整域は体になることを示せ.

問 3. $\mathbb{Z}$ の自明でないイデアルで, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ となる例, および $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$ となる例を与えよ.

問 4. R を整域とすると, $R[X]$ も整域となることを示せ.

問 5. 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ において 2 は既約元であることを次の順で示せ.

1. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \ni x = a + b\sqrt{-5}$ に対して, $N(x) = a^2 + 5b^2$ とすると, $N(xy) = N(x)N(y)$, $x, y \in Z[\sqrt{-5}]$ が成立することを示せ.
2. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \ni x$ が単元 (乗法の逆元を持つ) なら $N(x) = 1$ を示せ.
3. 上の性質を利用して, 2 は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において, 既約元であることを示せ.

問 6. 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ について次に答えよ.

1. $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を自然な環準同型写像とし, $f : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $f(a + b\sqrt{-5}) = \pi(a - b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$ で定めると, f は環準同型写像になることを示せ.
2. $\ker(f) = (2, 1 + \sqrt{-5})$ (2 と $1 + \sqrt{-5}$ で生成されるイデアル) となることを示せ.
(よって特に, $(2, 1 + \sqrt{-5})$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の極大イデアルであり素イデアルとなる.)
3. $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ とすると, $2 \in \mathfrak{a}^2$ となることを示せ.(注: $\mathfrak{a}^2 = \{r^2 \mid r \in \mathfrak{a}\}$ **ではない**. イデアルの積については定義を参考書でしっかり調べること.)
4. $(2) = \mathfrak{a}^2$ を示せ.

問 7 (難しく考えすぎない. 中 3 レベルの計算問題, 問 5 の考え方もヒントになる.)**.** 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ について, 次に答えよ.

1. ± 1 と異なる単元を 1 つ与えよ.
2. 単元全体の集合 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times}$ は無限集合であることを示せ. (1. で求めた単元を ε とするとき, ε^n を考えよ.)

問 8. $\mathbb{Q}[X]$ において, $X^4 + 3X + 1$ は既約な多項式であることを示せ.

問 9 (ベキ零根基)**.** R を環とする. $x \in R$ は, ある自然数 n が存在して $x^n = 0$ となるときベキ零であるという. ベキ零元全体, $\{x \in R \,|\, x \text{ はベキ零 }\}$ は R のイデアルになることを示せ.