2015 年度代数学 I 中間試験　　(小問も込めて, 1 題 10 点で採点します.)

・解答用紙 (A3 白紙) に学籍番号・氏名を記入してください.

・解答用紙は, どのように使っても構いません. 解答用紙は, 裏面も使ってください.

・裏紙は, 計算用紙, 下書き用紙として使ってください.

問 1. 群において, 指数 2 の部分群は正規部分群になることを示せ.

問 2 (両側剰余類)**.** G を群とし, H, K を G の部分群とする. $x, y \in G$ に対して, $x \sim y$ を, ある $h \in H, k \in K$ が存在して $y = hxk$ となることであると定義すると, これは, G の同値関係を定めることを示せ.

問 3. 群 G の中心 $Z(G)$ は G の正規部分群であることを示せ.

問 4. $n \geqq 3$ のとき, 対称群 S_n の中心は単位群になることを示せ.

問 5. $[S_n, S_n] = A_n$ を示せ.

問 6. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ とし, $w : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を $w\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ とする. 次を示せ.

1. w は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の自己同型写像である.
2. w は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の内部自己同型写像ではない.

問 7. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の中心を求めよ.

問 8 (もしかしたら, 解析学 II で出てくるかも)**.** $\mathbb{H} = \{z = x + yi \mid y > 0\}$ を複素上半平面とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ に対して, $gz = \dfrac{az + b}{cz + d}$(分数 1 次変換と呼ばれる) とする. 次を示せ.

1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad (g, z) \mapsto gz$ は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用を定める.
2. この作用における $i \in \mathbb{H}$ の固定化群は, $\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ となる.
3. この作用は推移的である (ヒント: $c = 0$ のときの i の軌道を考えよ).

問 9. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実正則行列全体のなす群として, $\mathbb{R}^n$ に行列と列ベクトルの積として自然に (左から) 作用させる. このとき, $\mathbb{R}^n$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$–軌道の集合は, $\{\{\boldsymbol{o}\},\ \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}\}$ となることを示せ ($\boldsymbol{o}$ はゼロベクトル, $\setminus$ は差集合の意味).

問 10. p, q を異なる素数とするとき, 位数 pq の有限群は可解群になることを示せ.

問 11. p を 3 以上の素数 (このような素数を奇素数ともいう) とするとき, 位数 $2p$ の非可換群は, 2 面体群になることを示せ.