

A partial alternating multiple zeta values

木本 一史 (琉球大学理学部数理科学科)

山崎 義徳 (九州大学大学院数理学府)

本講演では、非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の計算において現れる、ある交代多重和の計算について紹介する (非可換調和振動子については [3] を、そのスペクトルゼータ関数の特殊値については [1] を参照。あるいは [2] の参考文献を参照)。まず

$$\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & i = j \not\equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{i_j i_{j+1}} \quad (1)$$

と定める。これを用いて

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}}{i_1^2 i_2^2 \dots i_k^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

によって定義される交代多重和を考えよう。\$S_k\$ は交代多重ゼータ値

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} \frac{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}}{i_1^2 i_2^2 \dots i_k^2} \quad (3)$$

の部分和とみなせるので、\$S_k\$ のことを部分交代多重ゼータ値 (partial alternating multiple zeta value) と呼ぶことにする。我々の主結果は以下の通り。

Theorem 1. 任意の正整数 \$k\$ に対して、

$$S_k = \frac{(-1)^k B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} \quad (4)$$

が成り立つ。ただし \$B_n\$ はベルヌーイ数。□

オイラーによるリーマンゼータ関数 \$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\$ の特殊値公式

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m} \pi^{2m}}{(2m)!} \quad (5)$$

を思い出せば、この結果は \$S_k = -\zeta(2k)/2^{2k-1}\$ と書くことも出来る。通常よく扱われている種類の交代多重ゼータ値

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} \frac{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}}{i_1^2 i_2^2 \dots i_k^2} = \frac{\pi^{2k}}{2^{2k} (2k)!} \sum_{m=0}^k (-1)^{m-1} (2^{2m} - 1) \binom{2k}{2m} B_{2m} E_{2k-2m}, \quad (6)$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} \frac{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}}{i_1^2 i_2^2 \dots i_k^2} = (-1)^{k(k+1)/2} \frac{\pi^{2k}}{2^k (2k+1)!} \quad (7)$$

と比較すると、添字の走る範囲は複雑になっているものの、和の値はずっと簡単な形をしている (ここに \$E_n\$ はオイラー数)。このようなことが起こる背景を探ることは興味深い問題だと思われる。

主結果の証明には対称関数を利用する。まず、\$S_k\$ を「符号付きの部分」と「符号なしの部分」に切り分けるために、\$k\$ の分割でパラメトライズされるようないくつかの部分和に分ける。それらの部分和の間の関係式

が、分割の言葉を使うとうまく記述することが出来る。その結果を利用すると、 S_k の母関数が、対称関数に関する母関数公式において変数を特殊化したものを用いて表せることが分かる。その具体的計算を実行すると、 S_k の母関数が

$$\frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} x^{2k} \quad (8)$$

となることが示される。以上が証明の概略である。

S_k は自然に

$$S_k^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}}{i_1^p i_2^p \dots i_k^p} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

へと一般化されるが ($p = 1, 2, 3, \dots$) これらもほぼ同様に計算できる。つまり、上述した「切り分け」のプロセスは全く同じで、後は「対称関数の母関数における変数の特殊化」の計算もほぼ同様である (一般にはガンマ関数の積商になる)。特に $p = 2q$ が偶数のとき、

$$S_k^{(2q)} = (\sqrt{-1}\pi)^{2qk} \sum_{\substack{\lambda \vdash qk \\ \ell(\lambda) \leq q}} \langle p_q \circ h_k, m_\lambda \rangle \tilde{B}_{2\lambda} \quad (10)$$

$$= (\sqrt{-1}\pi)^{2qk} \sum_{\mu \vdash k} \frac{\prod_{j=1}^{\ell(\mu)} (2^{2q\mu_j - 1} - 1)}{z_\mu} \tilde{B}_{2q\mu} \quad (11)$$

となることが示される。ここに $\tilde{B}_{2\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{\ell(\lambda)} B_{2\lambda_j} / (2\lambda_j)!$, $z_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$ であり ($\ell(\mu)$ は μ の長さ、 $m_i(\mu)$ は μ における i の重複度) また p_q は冪和対称関数、 m_λ は単項対称関数、 \circ は対称関数のプレシズム積、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は対称関数環の (シューア関数たちが正規直交基底をなすような) 標準内積を表す。

参考文献

- [1] T. Ichinose and M. Wakayama: *Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations*. Kyushu J. Math. **59** (2005), 39–100.
- [2] K. Kimoto and Y. Yamasaki: *A partial alternating multiple zeta value*. Preprint.
- [3] A. Parmeggiani and M. Wakayama: *Non-commutative harmonic oscillators-I, II, Corrigenda and remarks to I*. Forum. Math. **14** (2002), 539–604, 669–690, *ibid* **15** (2003), 955–963.
- [4] Y. Yamasaki: *Evaluations of multiple Dirichlet L-values via symmetric functions*. Preprint.