岩堀・ヘッケ環の既約表現のホモロジカルな実現について

木本 一史（琉球大・理）　　三町 勝久（東工大・理）
野海 正俊（神戸大・自然）　高向 崇（九州大・数理）

パラメタ $q \in \mathbb{C}$ を持つ，生成元 $g_1, \dots, g_{n-1}$ と基本関係式

$$\begin{aligned} &g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}\,, \quad 1 \le i \le n-2, \\ &g_i g_j = g_j g_i\,, \quad |i-j| \ge 2, \\ &(g_i - 1)(g_i + q) = 0\,, \quad 1 \le i \le n-1 \end{aligned} \tag{1}$$

によって定義される結合代数 $H_q(\mathfrak{S}_n)$ を岩堀・ヘッケ環という．$H_q(\mathfrak{S}_n)$ は条件 $q(1+q)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \neq 0$ の下で対称群の群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ と同型であり，従ってこのとき $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の表現論は本質的に対称群の表現論と同等となる（以下では，この仮定をおく）．特に，その既約表現は箱が n 個のヤング図形によってパラメトライズされる．

ここで扱うのは，セルバーグ型積分に付随して決まるねじれホモロジー群の上での岩堀・ヘッケ環 $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の既約表現の実現である．記号を用意しよう．$z = (z_1, \dots, z_n)$ を $\mathbb{C}$ の異なる n 点の組とする．$z_j \in \mathbb{R}$ であって $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ と並んでいるとしておく．$\mathbb{C}^m$ から超平面 $t_i - t_j = 0$（$1 \le i < j \le m$）および $t_i - z_j = 0$（$1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n$）を取り除いたものを T_z とし，その上で定義される多価正則関数

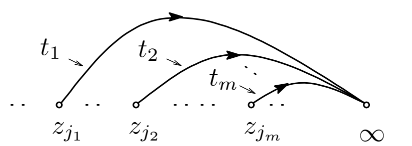
$$u(t) = \prod_{1 \le i < j \le m} (t_i - t_j)^g \prod_{1 \le i \le m} \prod_{1 \le j \le n} (t_i - z_j)^{\lambda_j}$$

を考え，$u(z)$ が定める局所系を $\mathcal{L}_z$ とする．ここで指数 $g, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ は条件

$$\lambda_j + \frac{g}{2} \in \mathbb{Z}\,(1 \le j \le n), \quad \frac{g}{2} \notin \mathbb{Z},\, \frac{1}{2}\mathbb{Z},\, \dots,\, \frac{1}{n}\mathbb{Z}$$

を満たすとしておく．各 $1 \le j_1, j_2, \dots, j_m \le n$ に対して，$u(t)$ を背負った回路 $\gamma_{j_1 j_2 \dots j_m}(t; z) \in H_m^{lf}(T_z, \mathcal{L}_z)$ を

$$\gamma_{j_1 j_2 \dots j_m}(t; z) = \left\{ \quad \right\} \otimes u(t) \in H_m^{lf}(T_z, \mathcal{L}_z)$$



（ここで分岐を $t_{\sigma(i)} > t_{\sigma(j)}$ のとき $\arg(t_{\sigma(i)} - t_{\sigma(j)}) = 0$ かつ $t_{\sigma(i)} > z_n$ のとき $\arg(t_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)}) = 0$ で指定）によって定義し，それを添え字に関して対称化したものを

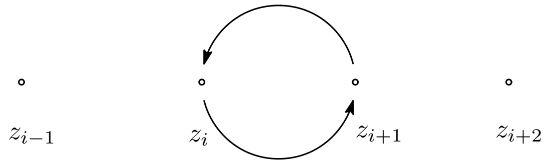
$$\widetilde{\gamma}_{j_1 j_2 \dots j_m}(z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (\gamma_{j_1 j_2 \dots j_m})(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)}; z) \tag{2}$$

とする．添え字 $j_1, \dots, j_m$ が全て相異なる場合には，$\widetilde{\gamma}_{j_1 j_2 \dots j_m}(z)$ は $\{1, \dots, n\}$ の部分集合 $\{j_1\, j_2\, \dots j_m\}$ を添え字とする，と思うことも出来るので，その意味で $\widetilde{\gamma}_{\{j_1 j_2 \dots j_m\}}(z)$ とも書くことにする．

これらの設定の下で，

$$V_m = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \mathbb{C} \cdot \widetilde{\gamma}_{\{j_1 j_2 \dots j_m\}}(z) \tag{3}$$

を考える．また $q = e^{-\pi\sqrt{-1}g}$ であるとする．Half Dehn twist と呼ばれる路 τ_i（$1 \le i \le n-1$）



によって路 $\widetilde{\gamma}_{\{j_1\,j_2\,\dots j_m\}}(z)$ たちに変形を施すという作用を考えると，これに $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の生成元 g_i を対応させることで V の上に $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の表現が定義される．この表現 V_m が，ヤング図形 $(n-m,m)$ に対応する $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の既約表現を与えている，というのが [1] の主結果であった．

その仕組みが次のようにして理解できる，というのが本講演の主題である．まず抽象的に $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の表現

$$\Psi_m = \bigoplus_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} \mathbb{C}\cdot\psi_{\{j_1,\dots,j_n\}} \tag{4}$$

を作っておき，$E:\Psi_{m-1}\to\Psi_m$ を

$$E(\psi_{\{j_1\,\cdots\,j_{m-1}\}}) = \sum_{s\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j_1,\,\cdots\,,\,j_{m-1}\}} q^{s-1-\ell(s;\{j_1,\,\cdots\,,\,j_{m-1}\})}\psi_{\{j_1,\,\cdots\,,\,j_{m-1}\}\cup\{s\}} \tag{5}$$

で定めると，これは intertwiner を与える（$\ell(s;\{j_1,\,\cdots\,,\,j_{m-1}\})$ は加える s によって定まる “転倒数”）．また $\theta:\Psi_m\ni\psi_{\{j_1,\dots,j_m\}}\mapsto\widetilde{\gamma}_{\{j_1\,j_2\,\dots j_m\}}(z)\in V_m$ もやはり intertwiner になっている．$\widetilde{\gamma}_{\{j_1\,j_2\,\dots j_m\}}(z)$ たちの間にはいくつかの一次関係式があるが，その情報はこれらの記号を用いると $\operatorname{im}E\subset\ker\theta$ と表現できる．

ここで $\Psi=\bigoplus_{m=0}^{n}\Psi_m$ という 2^n 次元の空間を考えると，Ψ には E を raising operator とするような $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現を定義することが出来，各 Ψ_m はウェイト空間になる．この表現は岩堀・ヘッケ環 $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の作用と可換であって，ちょうどシューア・ワイルの相互律

$$\Psi\cong\bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)\le 2}}\boldsymbol{E}_q^{\lambda}\boxtimes\boldsymbol{M}_q^{\lambda} \tag{6}$$

を考えていることになる（$\boldsymbol{E}_q^{\lambda},\boldsymbol{M}_q^{\lambda}$ はそれぞれ λ に対応する $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ および $H_q(\mathfrak{S}_n)$ の既約表現）．従って

$$\boldsymbol{M}_q^{(n-m,m)}\cong\Psi_m/\Psi_{m-1}\cong\Psi_m/E(\Psi_{m-1})\cong\theta(\Psi_m)/\theta(E(\Psi_{m-1}))\cong V_m \tag{7}$$

となる．より一般に，深さが 3 以上のヤング図形に対応する既約表現の実現も，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_k)$ と $H_q(\mathfrak{S}_n)$ との間のシューア・ワイルの相互律を実現する抽象的な表現をうまく経由することで構成することが出来る．

参考文献

[1] Mimachi, K.: Homological representations of the Iwahori-Hecke algebra associated with a Selberg-type integral. *Internat. Math. Res. Not.* **2005:33** (2005).

[2] Kimoto, K., Mimachi, K., Noumi, M. and Takamuki, T.: A homological realization of irreducible representations of the Iwahori-Hecke algebra. In preparation.