$-\frac{1}{k}$-行列式による Cauchy 行列式の類似

木本 一史（琉球大・理）　　若山 正人（九州大・数理）

n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ の α-**行列式**とは，パラメタ α による行列式の変型

$$\det{}^{(\alpha)}A := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\alpha^{n-\nu_n(\sigma)}a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}. \tag{1}$$

のことである．ここで $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群，$\nu_n(\sigma)$ は $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ のサイクル分解に現れるサイクルの個数を表す．パラメタの値が特別な場合として，$\det^{(-1)}$ は行列式を，$\det^{(1)}$ はパーマネントをそれぞれ与える．本稿ではパラメタが $\alpha=-\frac{1}{k}$（$1\le k\le n-1$）の場合を扱う．このパラメタの値は，巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det^{(\alpha)}(x_{ij})$ の既約成分が（generic なパラメタの場合に比べて）いくつか欠けるようなパラメタの値になっている（後述の (11) を参照のこと）．

行列 $A=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\in\mathrm{Mat}_{m,n}$ に対して，列に関する A の k-重化 $A^{[k]}\in\mathrm{Mat}_{m,kn}$ を

$$A^{[k]} := (\overbrace{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_1}^{k},\dots,\overbrace{\boldsymbol{a}_n,\dots,\boldsymbol{a}_n}^{k}) \tag{2}$$

で定義する．たとえば $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3,2}$ に対して，

$$A^{[2]}=\begin{pmatrix}a_1&a_1&b_1&b_1\\a_2&a_2&b_2&b_2\\a_3&a_3&b_3&b_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3,4},\quad A^{[3]}=\begin{pmatrix}a_1&a_1&a_1&b_1&b_1&b_1\\a_2&a_2&a_2&b_2&b_2&b_2\\a_3&a_3&a_3&b_3&b_3&b_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{3,6}\,.$$

といった具合である．この記号法の下で，次のような Cauchy 行列式の類似物が得られる．

Proposition 1. k,n を正整数とし，可換変数 $x_1,\dots,x_{kn},y_1,\dots,y_n$ を用意する．

$$\begin{aligned}C_{n,k}(x,y)&=\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{\substack{1\le i\le kn\\1\le j\le n}},\quad V_{n,k}(x)=(x_i^{n-j})_{\substack{1\le i\le kn,\\1\le j\le n}}\\ \boldsymbol{C}_{n,k}(x,y)&=C_{n,k}(x,y)^{[k]},\quad \boldsymbol{V}_{n,k}(x)=V_{n,k}(x)^{[k]}\in\mathrm{Mat}_{kn,kn}\end{aligned} \tag{3}$$

などとおく．このとき，等式

$$\det{}^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{C}_{n,k}(x,y)=\frac{\Delta_n(y)^k}{\prod_{\substack{1\le i\le kn\\1\le j\le n}}(1-x_iy_j)}\det{}^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x) \tag{4}$$

が成立する．ここで $\Delta_n(y)=\prod_{1\le i<j\le n}(y_i-y_j)$ は普通の差積．(4) の左辺を k 次の wreath Cauchy 行列式，右辺に現れる $\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x)$ を k 次の wreath Vandermonde 行列式と呼ぶ． □

Example 2 ($k=2$ **の場合**)**.** $k=2$ のときの (4) を具体的に書き下すと次のようになる：

$$\begin{aligned}&\det{}^{(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x_1y_1}&\frac{1}{1-x_1y_1}&\frac{1}{1-x_1y_2}&\frac{1}{1-x_1y_2}&\cdots&\frac{1}{1-x_1y_n}&\frac{1}{1-x_1y_1}\\ \frac{1}{1-x_2y_1}&\frac{1}{1-x_2y_1}&\frac{1}{1-x_2y_2}&\frac{1}{1-x_2y_2}&\cdots&\frac{1}{1-x_2y_n}&\frac{1}{1-x_2y_1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \frac{1}{1-x_{2n}y_1}&\frac{1}{1-x_{2n}y_1}&\frac{1}{1-x_{2n}y_2}&\frac{1}{1-x_{2n}y_2}&\cdots&\frac{1}{1-x_{2n}y_n}&\frac{1}{1-x_{2n}y_1}\end{pmatrix}\\ &=\frac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(y_i-y_j)^2}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le i\le 2n\\1\le j\le n}}(1-x_iy_j)}\times\det{}^{(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}x_1^{n-1}&x_1^{n-1}&\dots&x_1&x_1&1&1\\x_2^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_2&x_2&1&1\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ x_{2n}^{n-1}&x_{2n}^{n-1}&\dots&x_{2n}&x_{2n}&1&1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

(4) の証明には，$\det^{(-\frac{1}{k})}$ が満たす列の間の “交代性”

$$I \subset \{1,2,\ldots,n\},\, |I| > k \implies \sum_{w \in \mathfrak{S}_n(I)} \det{}^{(-\frac{1}{k})}(\boldsymbol{a}_{w(1)},\ldots,\boldsymbol{a}_{w(n)}) = 0 \tag{6}$$

を用いる．ここで $I \subset \{1,2,\ldots,n\}$ に対して $\mathfrak{S}_n(I) = \{w \in \mathfrak{S}_n\,;\, x \notin I \Rightarrow w(x) = x\}$ とおいた．

等式 (4) で wreath Cauchy 行列式 $\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{C}_{n,k}(x,y)$ を wreath Vandermonde 行列式 $\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x)$ に帰着させた．$\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x)$ について，次の命題が成り立つ．

Proposition 3. $\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x)$ は wreath 積 $\mathfrak{S}_k \sim \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^k \rtimes \mathfrak{S}_n < \mathfrak{S}_{kn}$ の（行ベクトルの置換としての）作用で相対不変である．

Cauchy の恒等式

$$\prod_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\ell(\lambda) \le n} s_\lambda(x_1,\ldots,x_n) s_\lambda(y_1,\ldots,y_n) \tag{7}$$

を用いると，等式 (4) から，kn 変数の Schur 多項式 $s_\lambda(x_1,\ldots,x_{kn})$ が wreath Vandermonde 行列式の比 $\dfrac{\det^{(-\frac{1}{k})}(x_\star^{i_{11}}, x_\star^{i_{21}}, \ldots, x_\star^{i_{kn}})}{\det^{(-\frac{1}{k})}\boldsymbol{V}_{n,k}(x)}$ たちの線型結合で書けることが分かる．その明示公式の予想はあるが，現時点ではその証明は得られていない．

なお，$\det^{(-\frac{1}{k})}$ は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 上の多重線形汎関数の中で上記 (6) のような交代性を持つものとして，以下のような意味で特徴付けられる．n 次正方行列全体 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 上の多項式関数のなす代数を $\mathcal{A}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ とする．これは

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} \tag{8}$$

によって $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-module となる（$E_{ij}$ は $\mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底，x_{ij} は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ の座標関数）．$\mathcal{A}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ の部分空間として，列ベクトルに関して多重線形な汎関数の全体

$$\mathrm{ML}_n = \bigoplus_{1 \le i_1,\ldots,i_n \le n} \mathbb{C} \cdot x_{i_1 1} \cdots x_{i_n n} \tag{9}$$

は $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-submodule となる．各正整数 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{AL}_n^k := \left\{ f \in \mathrm{ML}_n\,;\, I \subset [n],\, |I| > k \implies \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n(I)} f(\boldsymbol{x}_{\tau(1)},\ldots,\boldsymbol{x}_{\tau(n)}) = 0 \right\} \tag{10}$$

とおくと，これらもまた $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$-submodule となる．この設定の下で，次が成り立つ．

Proposition 4. $\mathrm{AL}_n^k = \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) \cdot \det^{(-\frac{1}{k})}(x_{ij})$ である．

証明には，[1] による結果

$$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) \cdot \det{}^{(-\frac{1}{k})}(x_{ij}) \cong \bigoplus_{\lambda_1 \le k} (\boldsymbol{E}^\lambda)^{\oplus f^\lambda} \tag{11}$$

を用いる（$\boldsymbol{E}^\lambda$ は最高ウェイト λ を持つ既約最高ウェイト加群，f^λ はヤング図形（と同一視した）λ を枠に持つ標準盤の個数）．

参考文献

[1] Matsumoto, S. and Wakayama, M.: Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. To appear in *J. Lie Theory*.

[2] Kimoto, K. and Wakayama, M.: Analogue of the Cauchy identity via $-\frac{1}{k}$-determinants. Preprint (2005).