量子 α-行列式で生成される $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$-加群

木本 一史（琉球大・理）　　若山 正人（九州大・数理）

q-行列式の変型として

$$\det_q^{(\alpha)} := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu_n(\sigma)} q^{\ell(\sigma)} x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n} \tag{1}$$

によって定義される量子座標環 $\mathcal{A}_q(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ の元を**量子** α-**行列式**と呼ぶことにする．ここで，置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して $\nu_n(\sigma)$ は σ のサイクル分解におけるサイクルの個数を表し，$\ell(\sigma)$ は σ の転倒数である．$\det_q^{(\alpha)}$ はパラメタの特殊化 $\alpha=-1$ で通常の q-行列式 $\det_q$ に戻る．本稿で扱う問題は [1] の量子群版，すなわち量子包絡環 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$ の自然な作用によって定まる巡回加群 $\boldsymbol{V}_{n,q}^{(\alpha)} := \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)\cdot\det_q^{(\alpha)}$ の構造の研究である（ただしここでは q が generic な場合についてのみ考え，1 のベキ根の場合などについては扱わない）．

簡単な考察により，ある有限集合 $\mathrm{Sing}(n,q)\subset\mathbb{C}$ があって，(i) $\alpha\in\mathrm{Sing}(n,q)$ ならば $\boldsymbol{V}_{n,q}^{(\alpha)}$ は自然表現のテンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ と同型であり，従って既約表現 $\boldsymbol{E}_q^{\lambda}$ の重複度 $m_\lambda(\alpha;q)$ は f^λ に等しく，(ii) $\alpha\notin\mathrm{Sing}(n,q)$ ならばいくつかの部分表現が現れないことが分かる．ここに f^λ は λ と同一視されるヤング図形を枠とする標準盤の個数を表す．従って，集合 $\mathrm{Sing}(n,q)$ の決定や，各 $\alpha\in\mathrm{Sing}(n,q)$ に対する既約表現 $\boldsymbol{E}_q^{\lambda}$ の重複度 $m_\lambda(\alpha;q)$ の評価といったことが問題になる．例を挙げる．

Example 1. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_3)$-加群 $\boldsymbol{V}_{3,q}^{(\alpha)}$ において，最高ウェイトベクトル（の候補）は

$$\begin{aligned}
v^{(3)} =& D_q^{(\alpha)}(1,1,1) = (1+\alpha)(1+2\alpha)x_{11}x_{21}x_{31},\\
v_1^{(2,1)} =& D_q^{(\alpha)}(1,1,2) + (1-q)D_q^{(\alpha)}(1,2,1) - qD_q^{(\alpha)}(2,1,1)\\
=&(1+\alpha)(1+(q-q^2-q^3)\alpha)(x_{11}x_{21}x_{32} + (1-q)x_{11}x_{22}x_{31} - qx_{12}x_{21}x_{31}),\\
v_2^{(2,1)} =& D_q^{(\alpha)}(1,1,2) - (1+q)D_q^{(\alpha)}(1,2,1) + qD_q^{(\alpha)}(2,1,1)\\
=&(1+\alpha)(1+(-q-q^2+q^3)\alpha)(x_{11}x_{21}x_{32} - (1+q)x_{11}x_{22}x_{31} + qx_{12}x_{21}x_{31}),\\
v^{(1,1,1)} =& D_q^{(\alpha)}(1,2,3) - qD_q^{(\alpha)}(2,1,3) - qD_q^{(\alpha)}(1,3,2) - q^3D_q^{(\alpha)}(3,2,1) + q^2D_q^{(\alpha)}(2,3,1) + q^2D_q^{(\alpha)}(3,1,2)\\
=&(1-2\alpha q^2+2\alpha^2q^4-\alpha q^6)\det_q
\end{aligned}$$

である（右肩の添え字が最高ウェイトを表す）．ただし $D_q^{(\alpha)}(i,j,k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\alpha^{3-\nu_3(\sigma)}q^{\ell(\sigma)}x_{\sigma(1)i}x_{\sigma(2)j}x_{\sigma(3)k}$ とおいた．これらの表示から，α が

$$\mathrm{Sing}(3,q) = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{q^2\pm(q-q^3)}, \frac{2q^{-2}+q^2\pm\sqrt{q^4+4-4q^{-4}}}{4}\right\} \tag{2}$$

に属するとき，いくつかの部分表現が現れないことが見て取れる．実際，$\boldsymbol{V}_{3,q}^{(\alpha)}$ の既約分解は

$$\boldsymbol{V}_{3,q}^{(\alpha)} \cong \begin{cases}
\boldsymbol{E}_q^{(1,1,1)} & \alpha=-1,\\
(\boldsymbol{E}_q^{(2,1)})^{\oplus 2}\oplus\boldsymbol{E}_q^{(1,1,1)} & \alpha=-1/2,\\
\boldsymbol{E}_q^{(3)}\oplus\boldsymbol{E}_q^{(2,1)}\oplus\boldsymbol{E}_q^{(1,1,1)} & \alpha=1/(q^2\pm(q-q^3)),\\
\boldsymbol{E}_q^{(3)}\oplus(\boldsymbol{E}_q^{(2,1)})^{\oplus 2} & \alpha=(2q^{-2}+q^2\pm\sqrt{q^4+4-4q^{-4}})/4,\\
\boldsymbol{E}_q^{(3)}\oplus(\boldsymbol{E}_q^{(2,1)})^{\oplus 2}\oplus\boldsymbol{E}_q^{(1,1,1)} & \text{otherwise}
\end{cases} \tag{3}$$

となる．表現の重複度の言葉で言い換えれば

$$
\begin{aligned}
m_{(3)}(\alpha;q) &= \begin{cases} 0 & \alpha = -1, -\frac{1}{2}, \\ 1 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
m_{(2,1)}(\alpha;q) &= \begin{cases} 0 & \alpha = -1, \\ 1 & \alpha = 1/(q^2 \pm (q-q^3)), \\ 2 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
m_{(1,1,1)}(\alpha;q) &= \begin{cases} 0 & \alpha = (2q^{-2} + q^2 \pm \sqrt{q^4 + 4 - 4q^{-4}})/4, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}
$$

となる．古典的な場合，[1] により最高ウェイト λ の既約表現 $\boldsymbol{E}^\lambda$ の重複度は 0 か f^λ のいずれか（まるまる全部現れるか，まるまる全部消えるか，のいずれか）であるが，量子版ではそうとは限らない．実際，$\alpha = 1/(q^2 \pm (q-q^3))$ のときに $0 < m_{(2,1)}(\alpha;q) < f^{(2,1)}$ となっている．さらに，上記の結果で形式的に $q \to 1$ としても古典的な場合の結果は回復されないことに注意する．

一般に，既約分解に現れる表現の重複度を記述するのは困難であるが，特別な場合として次が得られる．

Proposition 2. $\boldsymbol{V}_{n,q}^{(\alpha)}$ における $\boldsymbol{E}_q^{(n)}$ および $\boldsymbol{E}_q^{(1,\dots,1)}$ の重複度は

$$
\begin{aligned}
m_{(n)}(\alpha;q) &= \begin{cases} 0 & \alpha = -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n-1}, \\ 1 & \textit{otherwise}, \end{cases} \\
m_{(1,\dots,1)}(\alpha;q) &= \begin{cases} 0 & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} (-q^2)^{\ell(\sigma)} = 0, \\ 1 & \textit{otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}
$$

で与えられる． □

Proposition 3. $k = 1, \dots, n-1$ に対して，$m_\lambda\left(-\frac{1}{k};q\right) < f^\lambda \iff \lambda_1 > k.$ □

集合 $\mathrm{prSing}(n,q)$ を

$$
\mathrm{prSing}(n,q) = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n-1}\right\} \cup \left\{\alpha \in \mathbb{C};\ \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-q^2)^{\ell(w)} \alpha^{n - nu_n(w)} = 0\right\} \subset \mathrm{Sing}(n,q) \tag{6}
$$

によって定義するとき，一般の既約表現の重複度について次が予想される．

Conjecture 4. $\alpha \in \mathrm{Sing}(n,q) \setminus \mathrm{prSing}(n,q)$ ならば $0 < m_\lambda(\alpha;q) < f^\lambda$ である．

岩堀・ヘッケ環 $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ の右作用も考えた両側加群を $\mathbb{V}_{n,q}^{(\alpha)} := \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n) \cdot \det_q^{(\alpha)} \cdot \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ とすると，Conjecture 4 は次の命題と同値となる．

Conjecture 5. $\mathbb{V}_{n,q}^{(\alpha)} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \boldsymbol{E}_q^\lambda \boxtimes \boldsymbol{M}_q^\lambda \iff \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{prSing}(n,q)$．ただし $\boldsymbol{M}_q^\lambda$ は $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ の既約表現.

古典的な場合には $\mathrm{Sing}(n,1)$ と $\mathrm{prSing}(n,1)$ は一致し，また巡回加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) \cdot \det^{(\alpha)}$ 自体が既に群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の右作用で不変であることから，Conjecture 5 は [1] の結果の（弱い形での）類似と見なすことが出来る．

参考文献

[1] Matsumoto, S. and Wakayama, M.: Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. To appear in *J. Lie Theory*.

[2] Kimoto, K. and Wakayama, M.: Quantum α-determinant cyclic modules of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$. Preprint (2005).