Apéry-like numbers arising from special values of spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators

木本 一史（琉球大・理）　　若山 正人（九州大・数理）

$L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ 上の微分作用素

$$Q = Q(x, \partial_x) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left(-\frac{\partial_x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(x\partial_x + \frac{1}{2} \right) \tag{1}$$

を考える（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ はパラメタ，$\partial_x := \frac{d}{dx}$）．$Q$ の定める常微分方程式系 $Qu(x) = \lambda u(x)$ のスペクトル問題を非可換調和振動子と呼ぶ．パラメタが $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha\beta > 1$ を満たすとき，Q は離散固有値

$$(0 <)\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \to \infty$$

のみを持つ自己共役作用素となる．以下，この仮定の下で考える．このとき，ディリクレ型の級数

$$\zeta_Q(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s} \tag{2}$$

によって定義される関数 $\zeta_Q(s)$ を Q のスペクトルゼータ関数と呼ぶ．これは $s = 1$ で極を持つ以外有理型な関数として全平面に解析接続される（[2]）．

ここで扱うのは，スペクトルゼータ関数の特殊値である．一ノ瀬・若山 [3] において，$\zeta_Q(2)$ および $\zeta_Q(3)$ の積分表示が計算された．これらのうち，$\zeta_Q(2)$ については落合 [5] によって超幾何関数（あるいは完全楕円積分）を用いた表示

$$\begin{aligned} \zeta_Q(2) &= \frac{3}{4}\zeta(2) \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(\alpha\beta-1)} \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \, {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{1}{1-\alpha\beta} \right) \right)^2 \right\} \\ &= \frac{3}{4}\zeta(2) \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(\alpha\beta-1)} \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi\sqrt{1+\cos\theta/\sqrt{1-\alpha\beta}}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

が得られていたが，$\zeta_Q(3)$ についても超幾何関数を用いた同様の結果が得られた．

Theorem 1 ([4, Theorem 1.1]).

$$\begin{aligned} \zeta_Q(3) = &\frac{7}{4}\zeta(3) \frac{(\alpha+\beta)^3}{(\alpha\beta(\alpha\beta-1))^{3/2}} \left\{ 1 + 3\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \, {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{1}{1-\alpha\beta} \right) \right)^2 \right\} \\ &- \frac{3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2}{2\alpha^2\beta^2(\alpha\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}^3 (\alpha\beta)^{-k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2j+1)^3} \binom{-\frac{1}{2}}{j}^{-2}. \end{aligned} \tag{4}$$

証明は，一ノ瀬・若山の積分表示を変形することで，漸化式

$$4n^2\widetilde{J}_2(n) - (8n^2-8n+3)\widetilde{J}_2(n-1) + 4(n-1)^2\widetilde{J}_2(n-2) = 0 \quad (n \geq 2), \tag{5}$$

$$4n^2\widetilde{J}_3(n) - (8n^2-8n+3)\widetilde{J}_3(n-1) + 4(n-1)^2\widetilde{J}_3(n-2) = \frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!!} \quad (n \geq 2), \tag{6}$$

$$\widetilde{J}_2(0) = 1, \quad \widetilde{J}_2(1) = \frac{3}{4}; \qquad \widetilde{J}_3(0) = 0, \quad \widetilde{J}_3(1) = \frac{1}{2} \tag{7}$$

で定義される有理数列 $\widetilde{J}_k(n)$ $(k = 2,3)$ の一般項の具体的表示を求める問題に帰着する．$\widetilde{J}_k(n)$ の母関数 $\widetilde{w}_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{J}_k(n)x^n$ を考えると，これは合流型 Heun 微分方程式

$$D_{\mathrm{H}}\widetilde{w}_2(z) = 0, \qquad D_{\mathrm{H}}\widetilde{w}_3(z) = \frac{1}{2}{}_2F_1\left(1,1;\frac{3}{2};z\right) \tag{8}$$

（ここで $D_{\mathrm{H}} := z(1-z)^2\partial_z^2 + (1-3z)(1-z)\partial_z + z - \frac{3}{4}$）を満たす．適当な変数変換で超幾何微分方程式に書き替えられることから，原点でのベキ級数解を決定することで一般項が以下のように得られる：

$$\widetilde{J}_2(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \binom{n}{k}, \tag{9}$$

$$\widetilde{J}_3(n) = -2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2j+1)^3} \binom{-\frac{1}{2}}{j}^{-2}. \tag{10}$$

ここで現れた数列 $\widetilde{J}_k(n)$ およびその漸化式は，Roger Apéry が $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ の無理数性を証明する際に導入した（今日では Apéry 数と呼ばれる）数列 $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ およびその満たす漸化式

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 5, \quad (n+1)^3 A_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)A_n + n^3 A_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1), \tag{11}$$

と非常に似ている．Apéry 数は様々な合同関係式を満たすことが知られているが，$\widetilde{J}_k(n)$ たちも Apéry 数の場合と同様の合同関係式を満たすことが示される．たとえば，Apéry 数は

$$A_{mp^n-1} \equiv A_{mp^{n-1}-1} \pmod{p^n} \tag{12}$$

（p は素数，m,n は自然数）という合同関係式を満たすが（[1]），これの類似として次が得られた．

Theorem 2 ([4, Theorem 6.2]). 任意の奇素数 p および自然数 m,n に対して，

$$\widetilde{J}_2(mp^n) \equiv \widetilde{J}_2(mp^{n-1}) \pmod{p^n} \tag{13}$$

$$\widetilde{J}_3(p^n)p^{3n} \equiv \widetilde{J}_3(p^{n-1})p^{3(n-1)} \pmod{p^n} \tag{14}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] Beukers, F.: Some congruences for Apéry numbers. *J. Number Theory* **21** (1985), 141–155.

[2] Ichinose, T. and Wakayama, M.: Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators. *Commun. Math. Phys.*, published online, March 2005.

[3] Ichinose, T. and Wakayama, M.: Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations. *Kyushu J. Math.* **59** (2005), no.1, 39–100.

[4] Kimoto, K. and Wakayama, M.: Apéry-like numbers arising from special values of spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators. To appear in *Kyushu J. Math.*

[5] 落合啓之，A special value of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillators. 日本数学会 2005 年度年会 関数解析学分科会 講演アブストラクト