順序圏の表現論とその応用

木本一史
九州大学大学院数理学府

1　はじめに

圏に対する特別なクラスの一つとして，ここでは**順序圏**と呼ばれるものを取り上げる．圏 $\mathbf{K}$ が順序圏であるとは，大雑把に言えば，対象 $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ が順序づけられていて，かつ $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ が帰納的系，射影的系の双方をなすような特別な射を備えたものである．この要請によって，表現について比較的強いことが一般的に言える：順序圏においては，二つの対象 X, Y が $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ の半順序で比較可能であるときに $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(X), \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(Y)$ の表現の間に関連が付けられる（たとえば制限や埋め込みといった "上げ下げ" の操作が出来るようになる）．このことが効いて，$\mathbf{K}$ の表現が $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(X)$ の表現たちによって統制され，圏の表現論が半群の表現論に帰着される，という仕組みである．

この順序圏の概念は，無限次元群を圏によって捉えようという試みの中で定式化された [Ne]．無限次元群は，それ自身を直接扱うよりもむしろ，それを部分群として含むようなより大きな半群を考えて，それらのペアリングとして扱うのが自然であり，その群と半群のペアリングは，適当な圏における自己同型群と自己準同型半群として与えられるだろう，という哲学がある（圏論的拡大の原理 [Ne]）．この枠組みが機能するもっとも典型的なストーリーは，以下のようなものである（たとえば全対称群 $\mathfrak{S}_\omega := \{\sigma : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0} \mid \sigma \text{ は全単射}\}$ は以下の話の流れに乗っている）．無限次元群 G に対して，ある半群 Γ が存在して，それらの既約ユニタリ表現は（拡張と制限によって）一対一に対応する．このペアリング (G, Γ) は，適当な圏 $\mathbf{K}$ およびある対象 $\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ によって $G = \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\Omega) \subset \Gamma = \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\Omega)$ と実現される．このとき，半群 Γ の表現と圏 $\mathbf{K}$ の表現は一対一に対応する．このようなシチュエーションに現れる圏の典型的なものとして抽象化されたのが順序圏である．

本講演では，まず順序圏の表現についての基本的な事項を簡単に説明し，もっとも簡単な場合である有限の場合について自己準同型半群の '正則表現' の分解について述べる．ひとつの応用として，特に全順序圏の場合に，圏のラプラシアンと呼ばれる行列の正値性が得られることを紹介する．

2　順序圏

半順序集合 Σ の元 x, y に対して，$x \leq z$ かつ $y \leq z$ を満たす $z \in \Sigma$ を x と y の**上界**，$z \leq x$ かつ $z \leq y$ を満たす $z \in \Sigma$ を x と y の**下界**という．半順序集合 Σ の勝手な二元が最小上界と最大下

界を持つとき，Σ は**束 (lattice)** であるという．また，Σ の勝手な二元が比較可能なとき，Σ を**全順序集合 (totally ordered set)** という．全順序集合は束である．

$\mathbf{K}$ を圏とする．$\mathbf{K}$ の対象の全体を $\mathrm{Ob}(\mathbf{K})$，射の全体を $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$ とする．二つの対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ に対して，X から Y への射の全体を $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y)$ と書く．考えている圏が明らかなときには，下添え字 $\mathbf{K}$ を省いて $\mathrm{Mor}(X,Y)$ とも書く．$F \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y)$ であることを $F : X \to Y$ とも表す．

定義 2.1 (順序圏)． $\mathbf{K}$ を圏とする．任意の二元が上界を持つような半順序集合 Σ が存在して，$\mathbf{K}$ の対象が Σ によって添え字付けられているとせよ．これを $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}) = \{ X_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \}$ と書くことにする．各 $\alpha < \beta (\alpha, \beta \in \Sigma)$ に対して，射 $\lambda_{\beta\alpha} : X_\alpha \to X_\beta$ および $\mu_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ であって，条件

$$\lambda_{\gamma\beta}\lambda_{\beta\alpha} = \lambda_{\gamma\alpha} \quad (\alpha \le \beta \le \gamma)\,, \tag{2.1}$$

$$\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma} = \mu_{\alpha\gamma} \quad (\alpha \le \beta \le \gamma)\,, \tag{2.2}$$

$$\mu_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\alpha} = \mathbf{1}_\alpha \quad (\alpha \le \beta)\,, \tag{2.3}$$

を満たすものが存在するとき，$\mathbf{K}$ は**順序圏**であるという．ただし $\mathbf{1}_\alpha$ は X_α の恒等射とする．

注意． 添え字集合 Σ が束や全順序圏の場合には，それぞれに応じて「束順序圏」とか「全順序圏」と呼んだりする．

定義 2.2. $\mathbf{K}$ を順序圏とし，$\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$ 上に対合 $P \mapsto P^*$ が定義されているとする（つまり $P^{**} = P, (PQ)^* = Q^*P^*$）．これが $\lambda^*_{\beta\alpha} = \mu_{\alpha\beta}$（$\alpha \le \beta$）を満たすとき，$\mathbf{K}$ を**対合的順序圏**と呼ぶ．

いくつか順序圏の具体例を示す．

例 2.1. ヒルベルト空間（の同型類）を対象，線型作用素を射とする圏 $\mathbf{A}$ は対合的 (全) 順序圏である．じっさい，$\Sigma = \{0,1,2,\dots\} \sqcup \{\infty\}$ として $\mathrm{Ob}(\mathbf{A}) = \{ V_n = \mathbb{C}^n \mid n = 0,1,2,\dots\} \sqcup \{V_\infty = l^2\}$ であり，内積 $\langle \cdot , \cdot \rangle_{V_n}$ に関する随伴作用 $*$ が対合を与える．

例 2.2. ヒルベルト空間 (の同型類) を対象，定数倍を同一視した線型作用素を射 (つまり $\mathrm{Mor}_{\mathbf{P}}(V,W) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(V,W)/\mathbb{C}^\times$）とする圏 $\mathbf{P}$ は対合的 (全) 順序圏である．

例 2.3. 有限アーベル群を対象，それらの間の準同型写像を射とする圏 $\mathbf{Ab}^{\mathrm{fin}}$ は対合的束順序圏である（対合は有限アーベル群の双対性を用いて構成される）．

3 圏の表現

定義 3.1 (圏の表現)． $\mathbf{K}$ を与えられた圏とする．$\mathbf{K}$ から $\mathbf{A}$ への共変関手 ρ のことを，$\mathbf{K}$ の**線型表現**という．$\mathbf{K}$ から $\mathbf{P}$ への共変関手 π のことを，$\mathbf{K}$ の**射影表現**という．射影表現 π に対して，$\mathbf{K}$ の対象，射を $\mathbf{A}$ の対象，射に対応させる ϖ であって，ある写像 $m : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}} \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}} \to \mathbb{C}^\times$ が存在して

$$\varpi(X) = \pi(X) \quad (X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}))\,,$$
$$\varpi(PQ) = m(P,Q)\varpi(P)\varpi(Q) \quad (P, Q \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}) \quad (m(P,Q) \ne 0)$$

が成り立つものを π の断面関手という．線型表現は射影表現（の断面関手）ともみなすことができる．以下，単に表現と言ったら，線型表現もしくは射影表現のいずれかを表すことにし，どちらかに固有な性質について議論する場合のみ線型や射影といった接頭辞をつける．

例 3.1. 圏 $\mathbf{K}$ に対して，

$$o(X) = 0 \quad (X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}))\,, \quad o(P) = 0 \quad (P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}})$$

で定義される o は $\mathbf{K}$ の表現である．これを零表現という．

以下，表現に関する基本的な言葉を復習しておく．

定義 3.2 ($*$-表現). 対合的圏 $\mathbf{K}$ の表現 ρ が，条件

$$\rho(P^*) = \rho(P)^* \quad (P \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}})$$

を満たすとき，ρ は $\mathbf{K}$ の **$*$-表現**であるという．

定義 3.3 (部分表現と既約表現). ρ を圏 $\mathbf{K}$ の表現とする．$\mathbf{K}$ の表現 τ であって，条件

$$\begin{aligned} &\tau(X) \subset \rho(X) \quad (X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}))\,, \\ &\tau(P) = \rho(P)|_{\tau(X)} \quad (P : X \to Y) \end{aligned}$$

を満たすものを ρ の**部分表現**と呼ぶ．ρ の部分表現が，自分自身と零表現（これらを自明な部分表現という）のちょうど二つだけの時，ρ を**既約表現**という．

定義 3.4 (cyclic span). ρ を圏 $\mathbf{K}$ の表現とし，W をある $\rho(V)$ の部分集合とする．このとき，

$$A(X) := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,\{\, Pw \mid P \in \mathrm{Mor}(V, X), w \in W \,\} \subset \rho(X)$$

によって $A(X)$ を定義すると，A は ρ の部分表現を与える．これを，集合 W の **cyclic span** という．

定義 3.5 (従属表現). ρ を圏 $\mathbf{K}$ の表現とする．このとき，各 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ に対して，$\rho_X := \rho|_{\mathrm{End}(X)}$ は半群 $\mathrm{End}(X)$ や群 $\mathrm{Aut}(X)$ の $\rho(X)$ 上の表現を与える．これらの表現たちを，ρ に**従属する**表現，あるいは ρ の**従属表現**という．

補題 3.1. 圏 $\mathbf{K}$ の表現 ρ が既約ならば，ρ の従属表現たちは既約表現か零表現のどちらかである．

Proof. じっさい，ある $\mathrm{End}(X)$ の従属表現 ρ_X が非自明な部分表現 $W \subset \rho(X)$ を持ったとすると，その cyclic span A は ρ の非自明な部分表現となる． □

定義 3.6 (絡作用素と表現の同値). 圏 $\mathbf{K}$ の二つの表現 ρ, ρ' に対して，線型作用素の族

$$T = \left\{ T_\sigma : \rho(X_\sigma) \to \rho'(X_\sigma) \,\middle|\, \sigma \in \Sigma \right\} \subset \mathrm{Mor}(\mathbf{A})$$

であって，任意の $\alpha, \beta \in \Sigma$ および任意の $P : X_\alpha \to X_\beta$ に対して

$$\rho'(P)T_\alpha = T_\beta \rho(P)$$

が成り立つとき，T を ρ と ρ' の**絡作用素 (intertwiner)** と呼ぶ．絡作用素 T は，$\rho(X_\sigma) \neq 0$ である限り T_σ が可逆な作用素であるときに可逆であるといい，二つの表現 ρ, ρ' は可逆な絡作用素を持つときに**同値**であるという．(対合的) 圏 $\mathbf{K}$ の ($*$-) 既約表現の同値類全体を $\widehat{\mathbf{K}}$ で表す．

4 順序圏の表現論

ここでは，はじめに述べたように，順序圏 $\mathbf{K}$ の表現は自己準同型半群 $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(X)$ たちの表現によって決まっている様子を見る．

$\alpha \leq \beta$ に対して，$\vartheta_\beta^{(\alpha)} \in \mathrm{End}(X_\beta)$ を $\vartheta_\beta^{(\alpha)} := \lambda_{\beta\alpha}\mu_{\alpha\beta}$ で定義する．

$$(\vartheta_\beta^{(\alpha)})^2 = \vartheta_\beta^{(\alpha)}, \quad \mu_{\alpha\beta}\vartheta_\beta^{(\alpha)} = \mu_{\alpha\beta}, \quad \vartheta_\beta^{(\alpha)}\lambda_{\beta\alpha} = \lambda_{\beta\alpha}$$

などが簡単に分かる．また $\alpha' \leq \alpha$ に対して

$$\vartheta_\beta^{(\alpha')}\vartheta_\beta^{(\alpha)} = \vartheta_\beta^{(\alpha)}\vartheta_\beta^{(\alpha')} = \vartheta_\beta^{(\alpha')}$$

である．

補題 4.1. $\alpha' \leq \alpha$，$\beta' \leq \beta$ とする．このとき，任意の $P \in \mathrm{Mor}(X_{\alpha'}, X_{\beta'})$ に対して，$P = \mu_{\beta'\beta} Q \lambda_{\alpha\alpha'}$ となるような $Q \in \mathrm{Mor}(X_\alpha, X_\beta)$ が存在する．つまり $\mathrm{Mor}(X_{\alpha'}, X_{\beta'}) = \mu_{\beta'\beta}\mathrm{Mor}(X_\alpha, X_\beta)\lambda_{\alpha\alpha'}$．

Proof. じっさい，$Q = \lambda_{\beta\beta'} P \mu_{\alpha'\alpha}$ とすればよい． □

補題 4.2. ρ を順序圏 $\mathbf{K}$ の表現とする．もし，ある $\beta \in \Sigma$ に対して $\rho(X_\beta) = 0$ ならば，任意の $\alpha \leq \beta$ に対して $\rho(X_\alpha) = 0$ である．

Proof. 射影表現の場合に，断面関手で考えればよい．$\rho(X_\beta) = 0$ の仮定より，特に $\rho(\mathbf{1}_\beta) = 0$ であることに注意して，

$$\rho(\mathbf{1}_\alpha) = \rho(\mu_{\alpha\beta}\mathbf{1}_\beta\lambda_{\beta\alpha}) = c\rho(\mu_{\alpha\beta})\rho(\mathbf{1}_\beta)\rho(\lambda_{\beta\alpha}) = 0 \quad \left(c \in \mathbb{C}^\times\right)$$

なので，$\rho(X_\alpha) = \mathrm{im}\,\rho(\mathbf{1}_\alpha) = 0$ である． □

補題 4.3. ρ を順序圏 $\mathbf{K}$ の表現とする．このとき，次の二つは同値である．

(a) ρ は既約表現.

(b) ρ の従属表現 $\rho_\sigma := \rho_{\mathrm{End}(X_\sigma)}$ $(\sigma \in \Sigma)$ がすべて既約表現.

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b) は補題 3.1 で示した．(b) $\Rightarrow$ (a) を示そう．ρ の勝手な部分表現を M とし，$N := \rho/N$ を商表現とする．従属表現の既約性の仮定から，任意の $X_\sigma \in \Sigma$ に対して $M(X_\sigma) = 0$ か $N(X_\sigma) = 0$ のいずれか一方が成り立つ．勝手に $\alpha, \beta \in \Sigma$ をとると，$\alpha, \beta \leq \sigma$ なる $\sigma \in \Sigma$ が存在するので，補題 4.2 より「$M(X_\alpha) = 0$ かつ $M(X_\beta) = 0$」または「$N(X_\alpha) = 0$ かつ $N(X_\beta) = 0$」のどちらか一方が成り立つ．従って，一斉に $M(X_\sigma) = 0$ か $N(X_\sigma) = 0$ ということになり，M は自明な部分表現でなくてはならない．つまり，ρ は既約である． □

$\mu_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\alpha} = \mathbf{1}_\alpha$ に注意すれば，$P \in \mathrm{End}(X_\alpha)$ に対して，$U_{\beta\alpha}(P) := \lambda_{\beta\alpha} P \mu_{\alpha\beta} \in \mathrm{End}(X_\beta)$ と定めことにより，$U_{\beta\alpha} : \mathrm{End}(X_\alpha) \to \mathrm{End}(X_\beta)$ は半群の埋め込みを与える．このとき，次の同値が成り立つ．

命題 4.4. ρ を順序圏 $\mathbf{K}$ の表現とし，$\alpha \leq \beta$ とする．このとき，$\mathrm{im}\,\rho(\vartheta_\beta^{(\alpha)})$ は $\rho(U_{\beta\alpha}(P))$ $(P \in \mathrm{End}(X_\alpha))$ たちの作用で不変である．半群 $\mathrm{End}(X_\alpha)$ の二つの表現 $(\rho, \rho(X_\alpha))$ と $(\rho \circ U_{\beta\alpha}, \mathrm{im}\,\rho(\vartheta_\beta^{(\alpha)}))$ は同値である．

Proof. $\mathrm{im}\,\rho(\vartheta_\beta^{(\alpha)})$ の $\rho(U_{\beta\alpha}(P))$-不変性は，交換関係 $U_{\beta\alpha}(P)\vartheta_\beta^{(\alpha)} = \vartheta_\beta^{(\alpha)} U_{\beta\alpha}(P)$ から分かる．また，$\rho(\lambda_{\beta\alpha}) : \rho(X_\alpha) \to \mathrm{im}\,\rho(\vartheta_\beta^{(\alpha)})$ が，二つの表現 $(\rho, \rho(X_\alpha))$ と $(\rho \circ U_{\beta\alpha}, \mathrm{im}\,\rho(\vartheta_\beta^{(\alpha)}))$ の絡作用素を与える．これは逆作用素 $\rho(\lambda_{\beta\alpha})^{-1} = \rho(\mu_{\alpha\beta})$ を持つので，たしかに同値である． □

命題を述べるために必要な言葉を用意しておこう．

定義 4.1 (下降関手). $\alpha \leq \beta$ とする．半群 $\mathrm{End}(X_\beta)$ の表現 τ に対して，半群 $\mathrm{End}(X_\alpha)$ の表現 $\mathrm{low}_\beta^\alpha(\tau) := \tau \circ U_{\beta\alpha}$ を対応させる操作 $\mathrm{low}_\beta^\alpha$ を**下降関手 (lowering functor)** という．

定義 4.2 (互換系). $\mathbf{K}$ を順序圏とし，各 $\sigma \in \Sigma$ に対して半群 $\mathrm{End}(X_\sigma)$ の既約表現 ρ_σ が与えられているとする．このとき，表現の族 $\{\rho_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ が**互換系 (compatible system)** であるとは，任意の $\alpha \leq \beta$ に対して $\mathrm{low}_\beta^\alpha \rho_\beta \cong \rho_\alpha$ となることをいう．

表現の "上げ下げ" に関する次の命題が順序圏の表現論を統制するもっとも基本的な命題の一つである．

命題 4.5. $\mathbf{K}$ を順序圏，$\{\rho_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ を互換系とする．このとき，$\mathbf{K}$ の表現 ρ であって，$\rho(P) = \rho_\sigma(P)$（$\sigma \in \Sigma, P \in \mathrm{End}(X_\sigma)$）を満たすものがただ一つ存在する．

Sketch of proof. 順序圏 $\mathbf{K}$ の射の全体 $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}$ は，$\mathrm{End}(X_\sigma)$（$\sigma \in \Sigma$）および $\lambda_{\beta\alpha}$, $\mu_{\alpha\beta}$（$\alpha \leq \beta$）たちによって生成される．じっさい，$P \in \mathrm{Mor}(X_\alpha, X_\beta)$ のとき，$X_\alpha, X_\beta \leq X_\sigma$ なる X_σ をとれば

$$P = \mu_{\beta\sigma}(\lambda_{\sigma\beta} P \mu_{\alpha\sigma})\lambda_{\sigma\alpha}, \quad \lambda_{\sigma\beta} P \mu_{\alpha\sigma} \in \mathrm{End}(X_\sigma)$$

である．このことを用いて，$\{\rho_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ から具体的に ρ を構成することが出来る． □

5 正則表現の分解

$\mathbf{K}$ を対合的順序圏とし，その添え字集合を Σ とする．以下では，射の個数 $\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y)$ が有限の場合について議論する．また簡単のため $\Gamma_\alpha := \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(X_\alpha)$ とおく．

$\alpha,\beta\in\Sigma$ とし，$\Gamma_\alpha\times\Gamma_\beta$ の表現 $\bigl(R, L^2(\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha))\bigr)$ を

$$L^2(\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha)) := \{f : \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha)\to\mathbb{C}\},$$
$$\{R(a,b)f\}(P) := f(a^*Pb) \quad (a\in\mathrm{End}(X_\alpha), b\in\mathrm{End}(X_\beta))$$

によって定義する．有限群 G の正則表現 $L(G)$ の（$G\times G$-加群としての）分解

$$L(G)\cong\sum_{\pi\in\widehat{G}}\pi^*\boxtimes\pi \tag{5.1}$$

の類似として，α と β が**比較可能**であるときに $L^2(\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha))$ の分解を与える．

命題 5.1. $\mathbf{K}$ を対合的順序圏とする．$\alpha,\beta\in\Sigma$ に対して，$\alpha\le\beta$ かつ $\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha)$ が有限であるとする．このとき，$\Gamma_\alpha\times\Gamma_\beta$-加群としての分解

$$L^2(\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha))\cong\sum_{\rho\in\widehat{\mathbf{K}}}\rho_\alpha^*\boxtimes\rho_\beta \tag{5.2}$$

が成り立つ．

Proof. 略記号として $M := \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha)$ としておく．まず，左辺を Γ_β-加群として次のように分解する：

$$L^2(\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\beta,X_\alpha))\cong\sum_{\pi\in\widehat{\Gamma}_\beta}\mathrm{Hom}_{\Gamma_\beta}(W_\pi, L(M))\otimes W_\pi. \tag{5.3}$$

ただし，W_π は π に対応する Γ_β-加群とする．以下，各 π 成分ごとに議論する．

既約表現 $\pi\in\widehat{\Gamma}_\beta$ を固定しよう．このとき，従属表現の同値 $\rho_\beta\cong\pi$ を満たすような圏 $\mathbf{K}$ の既約表現 ρ がただひとつ存在する．そこで，$\mathrm{Hom}_{\Gamma_\beta}(W_\pi, L(M))$ と ρ_α^* の Γ_α-加群としての同値を示せばよい．下降関手と互換系の定義から，従属表現 ρ_α は $\mathrm{im}\,\pi(\theta_\beta^\alpha)\subset W_\pi$ 上の表現 $\mathrm{low}_\beta^\alpha\pi$ と同値であることに注意する．

$\mathrm{Hom}_{\Gamma_\beta}(W_\pi, L(M))$ と $(\mathrm{low}_\beta^\alpha\pi)^*$ （$\cong\rho_\alpha^*$）の同値を示すために，以下のように具体的に絡作用素を作る：$\psi\in\mathrm{Hom}_{\Gamma_\beta}(W_\pi, L(M))$ に対して

$$(T\psi)(x) := (\psi x)(\mu_{\alpha\beta}) \quad \bigl(x\in\mathrm{im}\,\pi(\theta_\beta^\alpha)\subset W_\pi\bigr). \tag{5.4}$$

これは確かに絡作用素を与える．じっさい，

$$\begin{aligned}((\mathrm{low}^\alpha_\beta\pi)^*(a)T\psi)(x) &= (T\psi)(\mathrm{low}^\alpha_\beta\pi(a^*)x)\\ &= (\psi\pi(\lambda_{\beta\alpha}a^*\mu_{\alpha\beta})x)(\mu_{\alpha\beta})\\ &= \rho(1,\lambda_{\beta\alpha}a^*\mu_{\alpha\beta})(\psi x)(\mu_{\alpha\beta}) \quad (\because \psi \text{ は } \Gamma_\beta\text{-絡作用素})\\ &= (\psi x)(\mu_{\alpha\beta}\cdot\lambda_{\beta\alpha}a^*\mu_{\alpha\beta})\\ &= (\psi x)(a^*\mu_{\alpha\beta}) \quad (\because \mu_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\alpha} = 1_\alpha)\\ &= (R(a,1)\psi x)(\mu_{\alpha\beta})\\ &= (TR(a,1)\psi)(x)\end{aligned}$$

となっている．

有限次元で考えているから，あとは T が単射であることを示せば良い．$\psi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\beta}(W_\pi, L(M))$ に対して，

$$\begin{aligned}T\psi = 0 &\implies (\psi x)(\mu_{\alpha\beta}) = 0 \quad \big(\forall x \in \mathrm{im}\,\pi(\theta^\alpha_\beta)\big)\\ &\implies (\psi x)(\mu_{\alpha\beta}b) = 0 \quad \big(\forall x \in \mathrm{im}\,\pi(\theta^\alpha_\beta), \forall b \in \Gamma_\beta\big)\end{aligned}$$

であるが，簡単に分かるように $\mathrm{Mor}(X_\beta, X_\alpha) = \mu_{\alpha\beta}\Gamma_\beta$ であるから，これは $\psi \equiv 0$ を意味する．従って T は可逆な絡作用素で，目的の同値性が示された． □

6　ラプラシアンの正値性問題

6.1　圏のラプラシアン

有向グラフのラプラシアン (隣接行列) の類似として，圏 $\mathbf{K}$ のラプラシアン $\Delta_{\mathbf{K}}$ が

(6.1)
$$\Delta_{\mathbf{K}} := (\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y))_{X,Y\in\mathrm{Ob}_o(\mathbf{K})}.$$

によって定義される．ただし，$\mathrm{Ob}_o(\mathbf{K}) \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ は条件「$X, Y \in \mathrm{Ob}_o(\mathbf{K})$ ならば $\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y) < \infty$」によって定める．

圏のラプラシアンを考える主な動機の一つは，無限次元の対象におけるセルバーグゼータ関数の類似物の構成である．はじめに述べた圏論的拡大の原理の示唆する「無限次元群そのものよりも付随する圏を見よ」という哲学に従って，たとえば無限次元群のセルバーグゼータ関数を付随する圏から作ろうということを考える．オリジナルのセルバーグゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ がラプラシアン Δ_Γ による行列式表示を持つのだった．そこで，圏 $\mathbf{K}$ のゼータ関数 $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ を，いわばスペクトル側からラプラシアン $\Delta_{\mathbf{K}}$ を用いて (正規化) 行列式として導入するという道筋を考えるのである．そのために，ラプラシアンのスペクトルゼータ関数

(6.2)
$$\zeta_{\Delta_{\mathbf{K}}}(s) := \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\Delta_{\mathbf{K}})} \lambda^{-s}$$

の解析的な性質を調べることになるが，まずは次の問題が基本的である.

問題 6.1 (正値性 [KuST]). “良い” 圏 $\mathbf{K}$ に対して，ラプラシアン $\Delta_{\mathbf{K}}$ の正値性を示せ.

これに対して，正則表現の分解 (5.2) を利用することによって，$\mathbf{K}$ が対合的全順序圏の場合に一般的に $\Delta_{\mathbf{K}}$ の正値性を示すことができる.

なお，この問題の弱い場合（2 次の小行列式の場合に相当する）であるコーシー・シュワルツ型不等式については，[KuW, I] においていくつかの具体的な圏の場合に成立が示されている：

問題 6.2 (コーシー・シュワルツ型不等式 [KuW, I]). “良い” 圏 $\mathbf{K}$ において，次の不等式

$$\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,Y)\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(Y,X) \leq \#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X,X)\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(Y,Y) \tag{6.3}$$

が成り立つか？

[KuW] は本講演と同様の動機（圏のラプラシアンを用いたゼータ関数の行列式表示の模索）に基づくものであり，[I] は圏という代数的な構造がどのような量的関係を規定するかという興味を動機とした研究である.

6.2 ラプラシアンの正値性

正則表現の分解 (5.2) において，両辺の次元を比較することによって次を得る.

系 6.1. $\mathbf{K}$ を対合的順序圏とし，Σ をその添え字集合とする．$\alpha, \beta \in \Sigma$ が**比較可能**のとき，

$$\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(X_\alpha, X_\beta) = \sum_{\rho \in \widehat{\mathbf{K}}} \dim \rho_\alpha \dim \rho_\beta \tag{6.4}$$

が成り立つ. □

ラプラシアンの正値性は，この直接の帰結である.

定理 6.2 ([Ki1]). 対合的全順序圏 $\mathbf{K}$ に対して，そのラプラシアン $\Delta_{\mathbf{K}}$ は正値である.

Proof. コーシー・ラグランジュの恒等式

$$\det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m \rangle \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_m 1} & \dots & a_{i_m m} \end{pmatrix}^2$$

（$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $m \leq n$）を思い出せば，$\Delta_{\mathbf{K}}$ の任意の主小行列式が正になることが分かる. □

系 6.3. 対合的全順序圏 $\mathbf{K}$ はコーシー・シュワルツ型不等式(6.3) を満たす. □

注意. たとえば $\mathbf{Ab}^{\mathrm{fin}}$ は束順序圏であるが全順序圏ではないので，上の結果は適用できない.（つまり上の議論ではコーシー・シュワルツ型不等式の成立も言えない.）なお，$\mathbf{Ab}^{\mathrm{fin}}$ に対するコーシー・シュワルツ型不等式は [KuW] で示されている.

6.3　例：圏 PB

等式 (6.4) を直接確認できる例として，全対称群 $\mathfrak{S}_\omega$ に付随する圏 **PB** の場合を挙げる．

圏 **PB** は，有限集合 $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ を対象とし，partial bijection と呼ばれるものを射とする圏である．ここで $[m]$ から $[n]$ への partial bijection とは，同じ濃度を持つ定義域 $D_\varphi\subset[m]$ と値域 $R_\varphi\subset[n]$ およびその間の全単射 $\varphi\colon D_\varphi\to R_\varphi$ からなる三つ組 $(\varphi,D_\varphi,R_\varphi)$ のことである．二つの射 $\varphi:[l]\to[m]$, $\psi:[m]\to[n]$ に対して，その合成 $\psi\varphi:[l]\to[n]$ は $D_{\psi\varphi}:=\varphi^{-1}(R_\varphi\cap D_\psi)$ から $R_{\psi\varphi}:=\psi(R_\varphi\cap D_\psi)$ への全単射として定義される．順序圏の構造を定める射 $\lambda_{nm}[m]\to[n]$ と $\mu_{mn}\colon[n]\to[m]$ は

$$\lambda_{nm}\colon[m]\ni x\mapsto x\in[m]\subset[n],$$

$$\mu_{mn}\colon[n]\supset[m]\ni x\mapsto x\in[m]$$

によって定義される（ただし $n\le m$）また，与えられた射 $\varphi\colon D_\varphi\to R_\varphi$ に対して φ^* は $\varphi^*\colon R_\varphi\ni x\mapsto\varphi^{-1}(x)\in D_\varphi$. によって定義される．これらによって **PB** は対合的全順序圏になる．簡単に分かるように，射の個数は

$$\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}([m],[n])=\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\binom{m}{k}\binom{n}{k}k! \tag{6.5}$$

によって与えられる．

PB の既約表現はヤング図形によってパラメトライズされることが知られている [Ne]．ヤング図形 λ に対応する **PB** の既約表現を ρ^λ とし，$\Gamma_n=\mathrm{End}_{\mathbf{PB}}([n])$ への従属表現を ρ^λ_n とする．

命題 6.4 ([Ne]). 任意のヤング図形 λ に対して，従属表現 ρ^λ の次元は

$$\dim\rho^\lambda_n=\binom{n}{|\lambda|}\dim\lambda \tag{6.6}$$

となる．ここで $\dim\lambda$ は λ に対応する対称群 $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ の既約表現の次数であり，$|\lambda|$ は λ の箱の個数とする．

よく知られた等式

$$\sum_{\lambda\vdash k}(\dim\lambda)^2=k!$$

に注意すれば，たしかに

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\widehat{\mathbf{PB}}}\dim\rho^\lambda_m\dim\rho^\lambda_n&=\sum_\lambda\left\{\binom{m}{|\lambda|}\dim\lambda\times\binom{n}{|\lambda|}\dim\lambda\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!\\&=\#\mathrm{Mor}_{\mathbf{PB}}([m],[n]).\end{aligned} \tag{6.7}$$

となっている．

参考文献

[I] Isbell, J.: Some inequalities in hom sets, *J. Pure Appl. Algebra* **76** (1991), 87–110.

[Ki1] Kimoto, K.: Laplacians and spectral zeta functions of totally ordered categories. *J. Ramanujan Math. Soc.* **18** (2003), No. 1, 53–76.

[Ki2] Kimoto, K.: Positivity of Laplacians of categories and minor determinant formulas. Preprint (2003).

[Ko] Koyama, S.: "Application of infinite-dimensional groups to the number theory" (in Japanese), Proceedings of 37-th Algebra symposium held at Meijo University, 1992.

[Ku] Kurokawa, N.: Zeta functions of categories, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), 221–222.

[KuST] Kurokawa, N., Sasaki, R. and Tanuma, H.: Spectra of categories, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **75** (1999), 92–95.

[KuW] Kurokawa, N. and Wakayama, M.: Cauchy-Schwarz type inequalities for categories, *to appear in Kyushu Math. J.*

[Ma1] MacDonald, I. G.: "Symmetric Functions and Hall Polynomials. Second Edition," Oxford University Press, 1995.

[Ne] Neretin, Yu. A.: "Categories of Symmetries and Infinite-Dimensional Groups," London Math. Soc. Monographs New Series **16**, Oxford Science Publication, 1996.

木本 一史 (KIMOTO, Kazufumi)
812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学府
`kimoto@math.kyushu-u.ac.jp`