ジャンプ型確率過程とその応用
講義ノート２０１４, 琉球大学

石川保志

平成 26 年 10 月 10 日

目 次

第1章　基礎概念

この章ではまず初等的な確率概念と確率分布を復習する。初等確率論の基本的な知識を仮定する。

1.1　復習

試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数**という。測度論の立場では、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から実数 $\mathbf{R}$ への可測関数のことを確率変数とよぶ。

確率変数 X がとびとびの値のみをとるとき、X は**離散確率変数**とよび、その分布を**離散確率分布**という。

確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, ...$ であるとき、$X = x_i$ となる確率 $P(X = x_i)$ を p_i と表わす。X のとる値 x_i とその確率 p_i の組 $((x_i, p_i); i = 1, ..., n)$ を**確率分布**という。

確率変数 X が特定の値を正の確率でとることがないとき，すなわち，X の値が区間全体に亘り、すべての $x \in \mathbf{R}$ について $P(X = x) = 0$ となるとき、X は**連続確率変数**とよび、その分布を**連続確率分布**という。

期待値、分散の定義

(1) 離散分布の場合

確率変数 X のとる値が $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ であるとき、

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i),$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

を、各々X の**分布の平均**、**分散**という。誤解が生じないときには，たんに X の**平均**，**分散**という。m を $E[X]$、v を $V(X)$ と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。

（2）連続分布の場合

この場合、$\rho(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$ を満たす関数 $\rho(x)$ が存在して [1],

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x)dx$$

と表される。 $\rho(x)$ を X の **(確率) 密度関数**という。

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx,$$
$$v = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\rho(x)dx$$

を，各々 X の **(分布の) 平均**，**分散**という。m を $E[X]$，v を $V(X)$ と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。

密度関数 $\rho(x)$ と X のとる値の範囲 (たとえば (a,b)) の組 $(\rho(x); x \in (a,b))$ を**確率分布**という。なお，離散分布と連続分布が組み合わさった分布を**混合分布**という。離散分布、連続分布に関わらず、関数 $x \mapsto P(X \leq x)$ を X の分布関数といい、$F_X(x)$ とかく。

1.2 確率分布（ポアソン分布、正規分布、指数分布、ガンマ分布, 二項分布）

(1) **二項分布**　X のとる値は $\{0, 1, 2, ..., n\}$ であり，

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, ..., n$$

であるとき，X は二項分布にしたがうという。ただし，$0 \leq p \leq 1$ である。このとき

$$E[X] = np, \qquad V(X) = np(1-p)$$

である。

証明

[1] 実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ は $f(x)$ の広義積分を表す。

以下で $q = 1 - p$ とおく。

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k {}_nC_k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

ここで，$k {}_nC_k = n {}_{n-1}C_{k-1}$ であるから，

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{n} n {}_{n-1}C_{k-1} p^k q^{n-k} \\
&= n \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l \; p^{l+1} q^{n-l-1} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l \; p^l q^{(n-1)-l} \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

同様に計算すると

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$$

であることがわかるので，

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq
\end{aligned}$$

であることがわかる。

例題 1. 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき，表の出る回数から裏の出る回数を引いた数 X の期待値および分散をもとめよ。

解 1. 表の出る回数を Y とすると，Y は二項分布に従うから

$$E[Y] = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \qquad V(Y) = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$X = Y - (5 - Y) = 2Y - 5$ であるから

$$E[X] = 2E[Y] - 5 = 2 \times \frac{5}{2} - 5 = 0$$
$$V(X) = 4V(Y) = 2^2 \times \frac{5}{4} = 5$$

である。

まとめると、二項分布の確率関数、分布関数、平均、分散は以下のとおりである。

ただし $n \in N, 0 < p < 1$ また、$q = 1 - p$ とする。

確率関数	$P(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$	$(x = 0, 1, \ldots, n)$
分布関数	$F(x) = \sum_{k=0}^{x} {}_nC_k p^k q^{n-k}$	$(x = 0, 1, \ldots, n)$
期待値	$E(X) = np$	
分散	$V(X) = npq$	

(2)　**ポアソン分布**

X のとる値は $\{0, 1, 2, ...\}$ であり，

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, ...$$

であるとき，X はパラメータ λ のポアソン分布にしたがうという。ただし，$\lambda > 0$ である。

このとき

$$E[X] = \lambda, \qquad V(X) = \lambda$$

である。

証明

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

一方，

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

したがって，

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

となる。

例 1. 次のような変数はポアソン分布に従うことが知られている。

（１）単位時間にガソリンスタンドにくる自動車の数。

（２）単位時間に交換機が受ける電話の呼び出し数。

（３）一連の製造ラインで発生する不良品の個数。

（４）ある地域の火災件数。

（５）小さなスーパーマーケットのレジでの待ち人数。

このように，小さな確率で非恒常的に起こる現象の記述にはポアソン分布が適している。

例題 2. $\frac{1}{100}$ の確率であたるくじを *100* 回試したとき，実際 r 回当たる確率をもとめよ。

解 2. *100* 回のくじ引きをして当たる回数の平均は

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100} = 1$$

そこで *100* 回のくじ引きを *1* 単位としてそこで平均 *1* 回当たると考える。実際 r 回当たる確率は

$$P_1(r) = \frac{1}{r!}1^r e^{-1} = \frac{e^{-1}}{r!}$$

したがって

$$P_1(0) = 0.368,\ P_1(1) = 0.368,\ P_1(2) = 0.184,\ P_1(3) = 0.061, ...$$

である。

100 回のくじ引きをして平均 1 回当たるといっても「1 回も当たらない」確率が約 *37%* あることに注目すべきである。つまり，祭礼の餅播きなどで，参加者の約 3 倍の餅を用意しなければ，餅がほぼ確実に全員に行き渡るようにはならない。

なお，X_1, X_2 が独立で，X_1 がパラメータ λ_1 のポアソン分布にしたがい，X_2 がパラメータ λ_2 のポアソン分布にしたがうとき，$Y = X_1 + X_2$ はパラメータ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布にしたがう。

証明省略。

例題 3. 杉浦救急病院は林町，山里町を管轄区域とし 4 台のベッドがある。林町，山里町から搬送される救急患者数は，それぞれ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ のポアソン分布にしたがっている。病院収容患者数が 4 人を超える確率をもとめよ。

解 3. $Y = X_1 + X_2$ とおく。林町と山里町は別の町内なので、X_1 と X_2 は独立。よって Y はパラメータ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布にしたがうと考えられる。これより

$$P(Y = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

したがってもとめる確率は

$$\begin{aligned} P(Y > 4) &= 1 - \sum_{k=0}^{4} P(Y = k) \\ &= 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4) \end{aligned}$$

となる。$\lambda = 3$ として、$\sim 1 - 0.815 = 0.185$。これは無視できない確率である。

問 1. ある家に *1* 日にかかってくる電話の回数はポアソン分布に従い，その平均は 8（回）である。この家に電話が *1* 日に *10* 回以上かかってくる確率と，*1* 日に高々 4 回しかかかってこない確率をもとめよ。

まとめると、ポアソン分布の確率関数、分布関数、平均、分散は以下のとおりである。

確率関数	$P(X = x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$	$(x = 0, 1, \ldots, n)$
分布関数	$F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$(x = 0, 1, \ldots, n)$
期待値	$E(X) = \lambda$	
分散	$V(X) = \lambda$	

(3) **正規分布**

ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

証明　2 重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)} ds dt = \pi$$

をしめせばよい。詳細は省略。

$m \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ に対し

$$\rho_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

を確率密度関数とする連続分布を，**パラメータ m, σ^2 の正規分布**といい，その分布を $N(m, \sigma^2)$ で表す。確率変数 X の分布がパラメータ m, σ^2 の正規分布のとき，X はパラメータ m, σ^2 の正規分布にしたがうといい，$X \sim N(m, \sigma^2)$ とかく。

ここで$y=\rho_{m,\sigma}(x)$のグラフは，$x=m$について対称であり，$(\rho_{m,\sigma}(m-x)=\rho_{m,\sigma}(m+x))$，$x<m$で増加，$x>m$で減少であり，さらに$x=m-\sigma, m+\sigma$を変曲点にもつ。また$u=\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$と変数変換すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{m,\sigma}(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=1$$

である。

このとき

$$E[X]=m,\qquad V(X)=\sigma^2$$

である。

証明

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}t\rho_{m,\sigma}(t)dt$$

$u=\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$と変数変換すると

$$\begin{aligned}
\text{右辺}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m+u\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du\\
&=m\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du+\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-u^2}du\\
&=m
\end{aligned}$$

また、分散については

$$\begin{aligned}
V(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-m)^2\rho_{m,\sigma}(t)dt\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sigma^2u^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}\sigma\sqrt{2}du\\
&=\sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-u^2}du\\
&=\sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-\frac{1}{2}ue^{-u^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\right)\\
&=\sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(0+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)=\sigma^2
\end{aligned}$$

とくに $m=0, \sigma=1$ のとき，この分布を**標準正規分布**という。つまり，$X \sim N(0,1)$ のとき，

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

である。標準正規分布には $\int_x^\infty \rho_{0,1}(t)dt$ の表があり，利用することができる。標準正規分布の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ について，$F(-x) = 1 - F(x)$ である。標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ で表すことが多い。

さらに，上の証明からわかるように，X がパラメータ m, σ^2 の正規分布にしたがうとき，変数変換 $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ をおこなえば Y は標準正規分布にしたがう。標準正規分布には表があるので，これを使って X の確率をもとめることができる。

例 2. $X \sim N(m, \sigma^2)$ のとき，表と変数変換より

$$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) \sim 0.683$$

$$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \sim 0.954$$

$$P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) \sim 0.997$$

例題 4. $X \sim N(4, 3^2)$ であるとき，$P(3 < X < 6)$ および $P(X > 10)$ をもとめよ。

解 4. $Y = \frac{X-4}{3}$ とおくと $Y \sim N(0,1)$ である。よって

$$P(3 < X < 6) = P(\frac{3-4}{3} < \frac{X-4}{3} < \frac{6-4}{3}) = P(-0.333 < Y < 0.667)$$
$$= \Phi(0.667) - \Phi(-0.333) = 0.7475 - 0.3694 = 0.3781$$

同様に

$$P(X > 10) = P(Y > \frac{10-4}{3}) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$$

問 2. ある試験での成績の結果は，平均点 *64* 点，標準偏差 *14* 点であった。得点の分布は正規分布にしたがうとするとき，次の問に答えよ。

（１）得点が *36* 点から *92* 点の者が *400* 人いた。受験者の総数は約何人か。

（２）合格点を *50* 点とすると，約何人が合格することになるか。

なお，$X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ であり，かつ X_1 と X_2 は独立であるとき，$Y = X_1 + X_2$ は $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ にしたがう。この証明には特性関数の議論が必要なため，詳細は省略する。

まとめると、正規分布の確率関数、分布関数、平均、分散は以下のとおりである。

密度関数	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x, \mu \in \mathbf{R}, \sigma \in \mathbf{R}^+)$
期待値	$E(X) = \mu$
分散	$V(X) = \sigma^2$

ここで $\mathbf{R}^+ = (0, \infty)$（正の実数全体の集合) とする。

(4) 確率変数 X のとる値が $\mathbf{R}^+ = (0, \infty)$ であり、密度関数が

$$P(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

で与えられるとき、X はパラメータ λ の指数分布に従うという。ただし $\lambda > 0$ とする。このとき、

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

である。

証明

$$E[X] = \int_0^\infty t(\lambda e^{-\lambda t})\, dt = [\,-te^{-\lambda t}\,]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

また分散については

$$\begin{aligned} V[X] = E[X^2] - E[X]^2 &= \int_0^\infty t^2\,(\lambda e^{-\lambda t})\, dt - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\, e^{-\lambda t}\, dt - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= 2\frac{1}{\lambda}E[X] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

まとめると指数分布の密度関数、平均および分散は以下のとおりである。

密度関数	$f(x) = \quad \lambda e^{-\lambda t}$	$(\lambda, x \in \mathbf{R}^+)$
期待値	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	
分散	$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$	

(5) ガンマ分布の確率関数、分布関数、平均、分散は以下のとおりである。

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

ここで $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ である。

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

である。

証明

平均については等式 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ を用いると

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)}(\beta x)^{\alpha}e^{-\beta x}dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

分散についても $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ を用いると

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^\infty (x-\mu)^2\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\ &= \int_0^\infty x^2\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx - \mu^2 dx \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}\int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+2)}(\beta x)^{\alpha+1}e^{-\beta x}dx - \mu^2 dx \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

X_i は互いに独立で同一の指数分布にしたがうとき、$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布はパラメータ $\alpha = n$ のガンマ分布にしたがうことが知られている。

まとめると、ガンマ分布の確率関数、分布関数、平均、分散は以下のとおりである。

密度関数	$f(x) = \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$(x \geq 0,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+)$
分布関数	$F(x) = 1 - e^{\beta x}\displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\beta x)^i}{i!}$	$(\alpha = n \in \mathbf{N})$
期待値	$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$	
分散	$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$	

1.3　測度論的基礎

近代的な確率論は測度論の概念・用語を用いて記述される。確率解析の理論もそうである。基本的に次のような対応がある：

確率論		測度論
全事象	Ω	全体集合
事象	A	可測集合 E
確率	P	有界測度
確率変数	X	可測関数 f
期待値	$E[X]$	積分　$\int f d\mu$
条件付き確率	$P(A\|\cdot)$	ラドン・ニコディム導関数　$\frac{dP(A\cap\cdot)}{dP(\cdot)}$)

Ω を抽象集合とする。これを標本空間とよぶ。Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものを σ-加法族とよぶ。

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, ... \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Ω を定義域とし $\mathbf{R}$ を値域とする関数 $X(\omega)$ が、任意の a, b に対して

$$X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき、X を**確率変数**という。

Lemma 1. 実数値関数 X についてつぎの *3* 条件は同値である。

(i) X は可測関数

(ii) 任意の a, b $(a < b)$ に対して $X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$

(iii) 任意の *1* 次元ボレル集合 B に対して $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

この補題により、任意の 1 次元ボレル集合 B に対して $P(X^{-1}(B))$ が定義できる。これを確率変数 X の**確率分布**とよぶ。

確率変数 X の平均 $E[X]$ は X の P による積分

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

として定義する。このルベーグ式積分の定義は、単関数による下からの近似による。

第2章　Poisson過程とLévy過程

Happy families are all alike; every unhappy family is unhappy in its own way. Lev Tolstoj, Anna Karenina

この章ではPoisson分布とPoisson過程およびPoissonランダム測度とLévy過程に関する基礎事項について述べる。測度論の知識はある程度既知とする。

2.1　Poisson分布とPoisson過程

2.1.1　確率過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で定義され、連続時間をパラメータとする確率変数の族 $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ を**確率過程**という。ただし、$\mathbf{T}$ は時間パラメータの集合である。

以下で標本 $\omega \in \Omega$ に依存するある主張 $A = A(\omega)$ を考えるとき、A が確率1で成立するとは

「$P(\Lambda) = 1$ を満たす適当な事象 Λ があって、すべての $\omega \in \Lambda$ に対して $A(\omega)$ が成立する」

という意味である。

$(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は共通の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で定義されているので、標本 ω を固定すると、時間 $t \in \mathbf{T}$ を変数とする1つの見本関数

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

が定まる。この関数を ω の**道**という。ω の道が

「すべての $t \in \mathbf{T}$ に対して $\lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega)$」

を満たすとき、**連続である**といわれる。

Definition 1. 確率過程 X_tについて
「$0 \leq s < t \leq u < v$　のとき、$X_t - X_s$と $X_v - X_u$は独立」が成り立つとき、$\{X_t\}$ は**加法過程**または**独立増分過程**という。

Definition 2. 確率過程 $X = (X_t)$ は次の性質をみたすとき**ブラウン運動**という。

(1) 加法過程であり、増分 $X_t - X_s$ の分布は $t - s$ のみに依存する

(2) 　X_t の分布は、平均 0 分散 t の正規分布である

(3) 　ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対し、その道は連続である

2.1.2　ポアソン過程

見本 X を固定して時間の関数 $t \mapsto X_t$ を記録したものを**計数過程**という。X のとる値が非負整数の場合には**件数過程**ともいう。たとえば、店への顧客の訪問数がこれにあたる。

Definition 3. λ を正の実数とするとき、件数過程 $\{N_t\}$ が次の *(1)* ∼ *(3)* を満たすとき、$\{N_t\}$ を**パラメータ λ のポアソン過程**という。あるいは $\{N_t\}$ はパラメータが λ のポアソン過程に従うという。λ は起こりやすさを表す指標であり、**強度**という。

(P1)　$\{N_t\}$ は加法過程である。

(P2)　$P(N_{t+dt} - N_t = 1) = \lambda dt$

(P3)　$P(N_{t+dt} - N_t \geq 2) = o(dt)$ つまり

$$P(N_{t+dt} - N_t = 0) = 1 - \lambda dt$$

条件 (2) はつまり $P(N_{t+dt} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ ということであり、

$$\lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \lambda$$

と言ってもよい。(3) はつまり $P(N_{t+h}-N_t=2)=o(h)$ $P(N_{t+h}-N_t=0)=1-\lambda h+o(h)$, ただし $o(h)$ はランダウの記号, ということであり

$$\lim_{h\to 0+}\frac{P(N_{t+h}-N_t\geq 2)}{h}=0$$

と言ってもよい。

つまり、ポアソン過程とは過去や未来とは独立に（定義の (1)）、常に一定の起こりやすさで生起し（定義の (2)）、同時に 2 件は生じない（定義の (3)）事柄の件数過程のことである。

Theorem 1. $\{N_t\}$が、パラメータがλのポアソン過程であるとき、$t>0$について、N_tはパラメータがλt のポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に従う。

Proof. 時間 t を m 分割する。m を十分大きくすると、$\frac{t}{m}$ は短いので、$\frac{t}{m}=dt$ とみなせる。すると、(P2), (P3) より各区間は事柄が生じる件数はせいぜい 1 件または 0 件であり、(P1) よりそれぞれの区間で N_t がパラメータ $\left(m,\dfrac{\lambda t}{m}\right)$ の二項分布に従うことが分かる ($N_t\sim Bin(m,\frac{\lambda t}{m})$ と表す) また、実際には $dt=\frac{t}{m}\to 0$ すなわち $m\to\infty$ なので、

$$\begin{aligned}
P(N_t=n)&=\lim_{m\to\infty}P(\sum_{k=1}^{m}N_{\frac{k}{m}t}=n)\\
&=\lim_{m\to\infty}{}_mC_n\left(\frac{\lambda t}{m}\right)^n\left(1-\frac{\lambda t}{m}\right)^{m-n}\\
&=\lim_{m\to\infty}\frac{m!}{(m-n)!n!}\left(1-\frac{\lambda t}{m}\right)^{-n}\left(1-\frac{\lambda t}{m}\right)^{m}\frac{(\lambda t)^n}{m^n}\\
&=1\cdot 1\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

ここで $m!=m(m-1)\cdots(m-n+1)\times(m-n)!$ を使った。 □

Theorem 2. 件数過程 $\{N_t\}$ について

(1) 加法過程

(2) $0\leq s<t$ のとき $N_t-N_s\sim Po(\lambda(t-s))$

(1), (2) が成り立つとき、$\{N_t\}$ はパラメータ λ のポアソン過程である。

Proof. (2) より

$$\begin{aligned} P(N_{t+h}-N_t=1) &= e^{-\lambda h}\lambda h \\ &= (1-h\lambda+o(h))\lambda h \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} P(N_{t+h}-N_t \geq 2) &= 1-P(N_{t+h}-N_t=1)-P(N_{t+h}-N_t=0) \\ &= 1-e^{-\lambda h}\lambda h - e^{-\lambda h} \\ &= 1-(1+\lambda h)(1-\lambda h+o(h)) = o(h) \end{aligned}$$

これらのことから、ポアソン過程である。 □

Definition 4. ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立なら、その出来事の件数過程 $\{N_t\}$ のことを**再生過程**という。

Theorem 3. ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立に同一の指数分布に従うなら、その出来事の再生過程 $\{N_t\}$ はポアソン過程である。

Proof. 時刻 t からはじめた生起間隔を $D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots$ とすると、指数分布の無記憶性から D_{t_1} は t 以前の生起間隔とは独立に D_1 と同一の分布に従い、$D_1, D_2, \ldots$ の独立性から $D_{t_2}, D_{t_3}, \ldots$ も t 以前の生起間隔および D_{t_1} とは独立に同一の分布に従う。つまり、斉次である加法過程を意味する。また、斉次性より

$$P(N_{t+h}-N_t \geq 2) = P(N_h - N_0 \geq 2) = P(D_1+D_2 \leq h)$$

また、$D_1, D_2, \ldots$ の従う指数分布のパラメータを λ とすると $D_1+D_2 \sim \Gamma(2,\lambda)$[1] より

$$\begin{aligned} P(D_1+D_2 \leq h) &= \int_0^h \lambda e^{-\lambda s}\lambda s ds \\ &= -[\lambda s e^{-\lambda s}]_0^h + \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= -\lambda h e^{-\lambda h} - [e^{-\lambda s}]_0^h \end{aligned}$$

[1] 15 ページで述べたように、X_i が互いに独立で同一の指数分布にしたがうとき、$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の分布はパラメータ $\alpha = n$ のガンマ分布にしたがうことが知られている。

$e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$ より右辺は

$$
\begin{aligned}
1 - e^{-\lambda h}(\lambda h + 1) &= 1 - (1 - \lambda h + o(h))(\lambda h + 1) = \lambda^2 h^2 + o(h) \\
&= o(h)
\end{aligned}
$$

また

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 1) = P(D_1 \leq h) = \int_0^h \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$$

以上よりポアソン過程の定義 (1) ～ (3) を満たすのでポアソン過程である。 □

Theorem 4. 単位時間当たりの発生件数の期待値が同一である斉次な加法過程のうち、単位時間当たりの発生件数の分散が最小なのはポアソン過程である。

Proof. 斉時な加法過程であれば、単位時間あたりの発生件数の期待値はある正の定数となるので、その値を λ とする、すなわち、件数過程を $\{N_t\}$ とすれば、

$$\lambda = \lim_{h \to 0+} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h}$$

また、$n = 1, 2, \cdots$ について

$$\lambda_n = \lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = n)}{h}$$

とすると

$$\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h} = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n$$

と表せる。

$$
\begin{aligned}
\text{単位時間当たりの発生件数の分散} &= \lim_{h \to 0+} \frac{V(N_{t+h} - N_t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0+} \left(\frac{E((N_{t+h} - N_t)^2)}{h} - \frac{E(N_{t+h} - N_t)^2}{h}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n - 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n
\end{aligned}
$$

ここで

$$\frac{E(N_{t+h}-N_t)^2}{h} = h(\frac{E(N_{t+h}-N_t)}{h})^2 \sim \lambda h^2 \to 0$$

を使った。

これを $\lambda = \sum_n n\lambda_n$ の条件で最小にするには

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \lambda_n = 0 \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

としなければならない。すなわち

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P(N_{t+h}-N_t = 1)}{h} = \lambda,$$

であり、また

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(N_{t+h}-N_t \geq 2)}{h} = 0$$

が成り立つ。ポアソン過程の定義をみたす。 □

2.1.3 複合ポアソン過程

以下 $X_1, X_2 \ldots$ は、互いに独立な同一の分布に従う確率変数の列であるとする。これらの確率変数は同一の分布に従うので、便宜のため、それらの確率変数を代表する確率変数を X と表す。N は $X_1, X_2, \ldots$ とは独立であり、取りうる値の範囲がが自然数である確率変数である。S は次のように定義される確率変数である。

Definition 5.

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N & (N > 0) \\ 0 & (N = 0) \end{cases}$$

S の分布を**複合分布**とよぶ。

複合分布の特性値を求めるにあたっては、次の三つの公式が基本となる。

Theorem 5. 複合分布の基本的性質

(1) $E(S) = E(N)E(X)$

(2) $V(S) = E(N)V(X) + V(N)E(X)^2$

(3) $M_S(t) = G_N(M_X(t)) = M_N(\log M_X(t)) = M_N(C_X(t))$

Proof. (1) S の平均は条件付き期待値を用いて

$$E(S) = E(E(S|N))$$

と書ける。また条件付き期待値は $X_1, \ldots, X_n$ と N が独立であることから

$$\begin{aligned} E(S|N=n) &= E(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= E(nX) \\ &= nE(X) \end{aligned}$$

より $E(S|N) = NE(X)$ となる。

(2)

$$\begin{aligned} V(S) &= E[S^2] - E[S]^2 \\ &= E[\big(\, E[S^2|N] \,-\, E[S|N]^2\big)\,] + E[\,E[S|N]\,] - E[\,E[S|N]]^2 \\ &= E(V(S|N)) + V(E(S|N)). \end{aligned}$$

独立確率変数 Y, Z に対して $V(Y+Z) = V(Y) + V(Z)$ が成り立つことから

$$V(S|N=n) = V(X_1 + \cdots + X_n) = nV(X)$$

従って

$$V(S|N) = NV(X)$$

これより

$$\begin{aligned} V(S) = E(V(S|N)) + V(E(S|N)) &= E(NV(X)) + V(NE((X))) \\ &= V(X)E(N) + E(X)^2 V(N) \end{aligned}$$

(3) 条件付き期待値を用いると

$$M_S(t) = E(e^{ts}) = E(E(e^{ts}|N))$$

とかける。ここで $E(e^{tS}|N=n) = E(e^{tx})^n$ となることから、$E(e^{tS}|N) = E(e^{tx})^N$. よって

$$M_S(t) = E(E(e^{tX})^N) = E(M_X(t)^N)$$

また、

$$E(M_X(t)^N) = E(\exp\{N \log M_X(t)\}) = M_N(\log M_X(t))$$

□

Definition 6. N がポアソン分布にしたがうとき、S の分布を**複合ポアソン分布**という。N_t がポアソン過程のとき、

$$S_t = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t} & (N_t > 0) \\ 0 & (N_t = 0) \end{cases}$$

とする。S_t を**複合ポアソン過程**という。

Proposition 1. 複合ポアソン分布の特性値
(1) 平均 $E(S_1) = \lambda E(X)$
(2) 分散 $V(S_1) = \lambda E(X^2)$

Theorem 2 の (2) より N_t はパラメータ λt のポアソン分布に従う。したがって、 $E[N_t] = \lambda t$, $V(N_t) = \lambda t$（ポアソン分布の特性値　8 ページ参照）となる。Theorem5 より

$$E[S_t] = E[N_t]E[X] = \lambda t E[X]$$

分散についても同様に

$$V[S_t] = E[N_t]V(X) + V(N_t)E[X]^2 = \lambda t \left(V(X) + E[X]^2\right) = \lambda t E[X^2]$$

で求めることができる。

2.2　Poisson ランダム測度と Lévy 過程

この節では Lévy 過程を扱う。Lévy 過程は複合 Poisson 過程を一般化したものであり、Poisson ランダム測度から構成される。

2.2.1 Lévy 過程

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。ここで Ω は $\mathbf{T} = [0, T]$ 上定義された軌跡の集合である。ここで $T \le \infty$ であり、$T = +\infty$ の場合には $\mathbf{T} = [0, +\infty)$ とする。多くの場合 T は有限として扱う。

$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は $\mathcal{F}$ の sub-σ-fields の増大する族である。これを**フィルトレーション**という。 ここで $\mathcal{F}_t$ は、右連続かつ、各軌跡 $s \mapsto \omega(s)$ が時刻 t までは可測となるような最小の σ-field である。

Definition 7. $\mathbf{T}$ 上の *Lévy* 過程 $(z(t))_{t\in\mathbf{T}}$ とは Ω 上の m 次元確率過程で次の *(1)–(5)* を満たすもののことである。

(1) $z(0) = 0$ *a.s.*[2]

(2) $z(t)$ は独立増分をもつ *(*つまり $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n, t_i \in \mathbf{T},$ に対し確率変数 $z(t_i) - z(t_{i-1})$ 達は独立*)*

(3) $z(t)$ は定常増分をもつ *(*つまり $z(t+h) - z(t)$ は h によるが、t によらない*)*

(4) $z(t)$ は確率連続 *(*つまり任意の $t \in \mathbf{T} \setminus \{0\}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し $\lim_{h\to 0+} P(|z(t+h) - z(t)| > \epsilon) \to 0$*)*

(5) $z(t)$ は *càdlàg* な軌跡をもつ *(càdlàg :* 右連続で左極限を持つ*)*

ここで $m \ge 1$ とする。$m = 1$ の場合には $z(t)$ は実数値過程である。

本講では主にジャンプ過程 (ジャンプをもつ確率過程) を扱う。時刻 t での増分を

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-).$$

とする。以下では $X_t, M_t, x_t, ...$ 等にも同じ記法 Δ を用いる。

$z(t)$ に対し計数過程 N を次のように導入する：

$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し

$$N(t, A) = \sum_{0\le s\le t} 1_A(\Delta z(s)),\ t > 0.$$

[2] ここで a.s. は ‘almost surely’(ほとんど確実に) の意味である。

とおく。これは時刻 t までの $z(.)$ の A へのジャンプ回数をはかる計数過程である。Lévy 過程 z の軌跡は càdlàg であるから、$\bar{A} \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ であるような $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し $N(t, A) < +\infty$ a.s. である。複合 Poisson 過程と異なり、Lévy 過程は、下の (1.2) により、$\mathrm{dist}(A, \{0\}) \to 0$ のとき、$N(t, A)$ は a.s. に限りなく $+\infty$ に近づく。

ここで

$$N((a, b] \times A) = N(b, A) - N(a, A),$$

により $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上のランダム測度が定義できる。ここで $a \leq b$。このランダム測度 N が平均 $E[N((a, b] \times A)]$ をもつ Poisson 分布にしたがい、かつ、互いに素な $(a_1, b_1] \times A_1, ..., (a_r, b_r] \times A_r \in \mathcal{B}(\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\}))$ に対して $N((a_1, b_1] \times A_1), ..., N((a_r, b_r] \times A_r)$ が独立であるとき、**Poisson ランダム測度**という。

Proposition 2. *(Lévy -Itô decomposition theorem, [25] Theorem I.42)* $z(t)$ を *Lévy* 過程とする。$z(t)$ は以下の表現をもつ。

$$z(t) = tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dsdz),$$

for a.e. ω *for all* $t \in \mathbf{T}$.

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, σ は $m \times m$ 行列である。$(W(t))_{t\in\mathbf{T}}, W(0) = 0$ は m 次元 *(*標準*)Wiener* 過程、$N(dtdz)$ は平均測度 $\hat{N}(dtdz) = E[N(dtdz)]$ をもつ *Poisson* ランダム測度であり、$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - \hat{N}(dtdz)$ である。ここで $W(t)$ と $t \mapsto (\int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dsdz))$ は独立であり、さらに表現は一意的である。

ここで $\int_0^t \int zN(dsdz)$ と $\int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$ は確率積分の意味である。その正確な定義については後で述べる。

Poisson ランダム測度を使って

$$\mu(A) = E[N(1, A)],\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\}) \tag{1.1}$$

とおく。これは **Lévy 測度**とよばれる。測度 μ は次を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} (1 \wedge |z|^2)\mu(dz) < +\infty. \tag{1.2}$$

N に対応する**補償つき Poisson ランダム測度**を

$$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - dt\mu(dz).$$

により定義する。

とくに、もし $\mu(dz)$ が

$$\int_{|z|\geq 1} |z|\mu(dz) < +\infty,$$

を満たせば $z(t)$ は次のように書ける：

$$z(t) = tc' + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}} z\tilde{N}(dsdz),$$

ただし $c' = c + \int_{|z|\geq 1} z\mu(dz)$.

$\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の測度 μ は (1.2) を満たすとき、そしてそのときに限り、ある Lévy 過程の Lévy 測度になる。実際次の **Lévy -Khintchine** 表現がなりたつ。

Proposition 3. *(1)* z を $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の *Lévy* 過程とする。このとき

$$E[e^{i(\xi,z(t))}] = e^{t\Psi(\xi)},\ \xi \in \mathbf{R}^m, \tag{1.3}$$

where

$$\Psi(\xi) = i(c,\xi) - \frac{1}{2}(\xi, \sigma\sigma^T\xi) + \int (e^{i(\xi,z)} - 1 - i(\xi,z)1_{\{|z|<1\}})\mu(dz). \tag{1.4}$$

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, $\sigma\sigma^T$ は非負行列であり、μ は *(1.2)* を満たす測度である。

(2) $c \in \mathbf{R}^m$, 行列 $\sigma\sigma^T \geq 0$ および *(1.2)* を満たす $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の σ*-finite* 測度 μ に対して、*(1.3), (1.4)* を満たす確率過程 z が存在する。この z は *Lévy* 過程である。

証明は [27] Theorem 8.1、および [8] Sect. 0 を参照せよ。

$D_p = \{t \in \mathbf{T}; \Delta z(t) \neq 0\}$ とおく。これは a.s. に $\mathbf{T}$ の可算部分集合である。 $A \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ とする。$\mu(A) < +\infty$ のとき、$D_p \ni t \mapsto \sum_{s\leq t,\Delta z(s)\in A} \delta_{(s,\Delta z(s))}$ により定義される測度は **Poisson 計数測度**という。関数 $D_p \ni t \mapsto p(t) = \Delta z(t)$ は **Poisson 点過程**という。

2.2.2 Lévy 過程の例

(1) Poisson 過程

Poisson 過程の Lévy 測度は $\lambda\delta_{\{1\}}$ であり、$b = 0, \sigma = 0$ である。

(2) 複合 Poisson 過程

複合 Poisson 過程 $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ と表される確率過程である。ここで $(Y_k), k = 1, 2, ...$ は共通の分布 μ をもつ 独立かつ同分布な確率変数列とし、N_t は (Y_k) と独立な、強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程とする Y_t は次のようにも表される：

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z \ N(dsdz),$$

ここで $N(dsdz)$ は平均測度 $\lambda ds\mu(dz)$ をもつ $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の Poisson ランダム測度である。

(3) 安定 (Stable) 過程

Lévy 測度 μ が

$$\mu(dz) = c_\alpha \frac{dz}{|z|^{m+\alpha}},$$

で与えられる Lévy 過程を**対称安定過程**という。ここで $\alpha \in (0, 2)$ である。

μ が、 S^{m-1} 上の関数 $a(.) \geq 0$ により

$$\mu(dz) = c'_\alpha a(\frac{z}{|z|}) \frac{dz}{|z|^{m+\alpha}},$$

で与えられる場合には、この過程は**非対称安定過程**という。$m = 1$ の場合には μ は次の形になる

$$\mu(dz) = (c_- 1_{\{z<0\}} + c_+ 1_{\{z>0\}}) \frac{dz}{|z|^{1+\alpha}},$$

ここで c_-, c_+ は非負定数.

(4) Wiener 過程

(1.4) の表現において $c = 0, \sigma\sigma^T = I, \mu \equiv 0$ となるものを (標準)Wiener 過程 (Brown 運動) という。

Wiener 過程 (Brown 運動)$W(t)$(で $W(0) = 0$ を満たすもの) は定義 7 を満たす連続 Lévy 過程である。

Wiener 過程は次のスケーリング性をもつ：任意の $c > 0$ に対し $c^{-\frac{1}{2}} W(ct)$ は $W(t)$ と同分布。

2.2.3 伊藤の公式

この節では Lévy 過程に対する伊藤の公式を述べる。

Proposition 4. *([19] Theorems 9.4, 9.5)*
(1) $X(t)$ を次で与えられる実数値過程とする：

$$X(t) = x + tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t \geq 0$$

ここで $\gamma(z)$ は $\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)^2\mu(dz) < \infty$ なる関数である。$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R})$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき実数値過程 $Y(t), t \geq 0$ は次を満たす：

$$\begin{aligned} dY(t) =& \frac{df}{dx}(X(t))cdt + \frac{df}{dx}(X(t))\sigma dW(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(X(t))\sigma^2 dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t) + \gamma(z)) - f(X(t)) - \frac{df}{dx}(X(t))\gamma(z)]\mu(dz)dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t-) + \gamma(z)) - f(X(t-))]\tilde{N}(dtdz). \end{aligned}$$

(2) $X(t) = (X^1(t), ..., X^d(t))$ を次で与えられる d 次元過程とする：

$$X(t) = x + tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int \gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t \geq 0.$$

ここで $c \in \mathbf{R}^d$, σ は $d \times m$ 行列、 $\gamma(z) = [\gamma_{ij}(z)]$ は $d \times m$ 行列値関数で上の確率積分が存在するもの、$W(t) = (W^1(t), ..., W^d(t))^T$ は m 次元標準 *Wiener* 過程とし、

$$\tilde{N}(dtdz) = (N_1(dtdz_1) - 1_{\{|z_1|<1\}}\mu(dz_1)dt, ..., N_m(dtdz_m) - 1_{\{|z_m|<1\}}\mu(dz_m)dt)$$

とする。ここで N_j は独立な *Poisson* ランダム測度で *Lévy* 測度 $\mu_j, j = 1, ..., m$ をもつものである。つまり、$X^i(t)$ は次で与えられる：

$$X^i(t) = x_i + tc_i + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} W_j(t) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma_{ij}(z)\tilde{N}_j(dsdz_j), i = 1, ..., d.$$

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R}^d)$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき $Y(t), t \geq 0$ は実数値確率過程であり、次を満たす：

$$
\begin{aligned}
dY(t) =& \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))c_i dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))\sigma_{ij} dW_j(t) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(t))(\sigma\sigma^T)_{ij} dt \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t)+\gamma^j(z_j)) - f(X(t)) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))\gamma_{ij}(z)]\mu_j(dz_j)dt \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t-)+\gamma^j(z)) - f(X(t-))]\tilde{N}_j(dtdz_j).
\end{aligned}
$$

ここで γ^j は $\gamma = [\gamma_{ij}]$ の第 j 成分を表す。

上の命題における、 $dW(t)$ および $\tilde{N}(dtdz)$ に関する確率積分の正確な定義は後で述べる。伊藤の公式の証明には Lévy-Itô 分解（Proposition 2) が本質的に使われる。

例

(1) $b = 0, \gamma(z) = 0, \sigma = 1$ そして $f(x) = x^2$ とする。このとき伊藤の公式より

$$
df(W(t)) = 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2}2dt = 2W(t)dW(t) + dt.
$$

よって

$$
df(W(t)) - dt = 2W(t)dW(t)
$$

であり

$$
\int_{\mathbf{T}} W(t)dW_t = \frac{1}{2}(W(T)^2 - T).
$$

(2) $b = 0, \gamma(z) = z, \sigma = 0$ そして $f(x) = x^2$ とする。 つまり $X(t) = z(t) = \int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$。このとき伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
df(z(t)) =& \int \{(z(t)+z)^2 - z(t)^2 - 2zz(t)\}\mu(dz)dt \\
&+ \int \{(z(t-)+z)^2 - z(t-)^2\}\tilde{N}(dt\,dz) \\
=& \int z^2\mu(dz)dt + \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dt\,dz)
\end{aligned}
$$

したがって

$$z(t)^2 = t\int z^2\mu(dz) + \int_0^t \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dtdz).$$

つまり

$$\int_0^t \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dtdz) = z(t)^2 - t\int z^2\mu(dz).$$

空間 D

$\mathbf{T}=[0,T]$, $T<+\infty$ とおく。$\mathbf{T}$ 上で定義され $\mathbf{R}^m$- または $\mathbf{R}^d$-値をとり、$[0,T)$ 上右連続で左極限をもつ (càdlàg paths) 関数の全体を $\mathrm{D}=D(\mathbf{T})$ とかく。$D(\mathbf{T})$ 上につぎのように与えられる Skorohod 距離 d_T を使って位相を導入する。d_T を

$$d_{\mathbf{T}}(f,g)=\inf_{\tau}\{|f(t)-g(\tau(t))|+|\tau(t)-t|\}$$

とおく。ここで τ は $\mathbf{T}$ から $\mathbf{T}$ への狭義増加連続関数で、$\tau(0)=0, \tau(T)=T$ となるものである。位相空間 $(D(\mathbf{T}),d_{\mathbf{T}})$ は **Skorohod 空間**とよばれる。空間 $(D(\mathbf{T}),d_{\mathbf{T}})$ は可分であり、同値な距離 $d^{\circ}_{\mathbf{T}}$ を導入することにより完備となる (see [2] Sect. 12)。

$D([0,+\infty))$ を $[0,+\infty)$ 上の càdlàg 関数全体を表す。この空間は次の距離 d により Fréchet 空間となり、位相空間 $(D([0,+\infty)),d)$ は完備かつ可分である。

もし sup-ノルム

$$d^{\infty}(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1\wedge \sup_{s\in[0,n]}|f(s)-g(s)|),$$

を導入すれば、空間 $(D([0,+\infty)),d^{\infty})$ は完備であるが、可分にはならない。([7] 参照。)

2.3 余談（コラム）: 確率とは何か

古典的な確率の定義 (ラプラス) では,「N 個の場合の確からしさの同等性」を根拠にして確率を決めている。

では,「同等に確からしい」とは何か。つまり，扱っている対象の何と何を同一視し，何と何を区別すればよいか。そして，いかにして「どれが起こることも同程度に期待できる」と考えうるのか。

問 3. 次の確率計算は実験にあうか。

（１）明日の天気は，雨が降るか（A），降らないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A) = 1/2$。

よって，$P(A) = 1/2$。

（２）植物（たとえばひな菊）の花びらを使った恋占いでは，結論となる事象には「愛してる」と「愛してない」の 2 つがあり，花びらの数の奇数・偶数に「愛してる」と「愛してない」を対応させる。偶数と奇数は交互に並んでいるから，これはこれら 2 つの事象が同等に確からしいことを（暗黙のうちに）仮定していることになる。この仮定は妥当か。

じつは，それは先験的には知りえない。「同等に確からしい」事象は，実験に合うように設定するものなのである。

例 3. N 個の箱に r 個の玉を入れる問題

＜仮定 I ＞　1 つの玉がどの箱に入るかは同等に確からしく、各々$1/N$ である。

次のように書いても同じ：

＜仮定 I' ＞　いろいろな玉の入れ方は全部で N^r 通りあるから、これらの書く場合を同等に確からしいと仮定して、各々$1/N^r$ とする。

これは重複順列 ${}_N\Pi_r = N^r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。

この仮定は，箱を空間の小領域、玉を気体の分子と見たときに,「マックスウエル-ボルツマンの統計」とよばれる。しかし、この統計（確率の決め方）では実験にあわなかった（黒体輻射の実験を説明できない)。

＜仮定 II ＞　玉は区別がつかない。

区別がつくのは、どの箱に何個づつ玉が入っているか、という様相のみである。したがって、重複組み合わせ（異なる N 種類のものから重複を許して r 個とる組み合わせ）${}_NH_r = {}_{N+r-1}C_r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。言い換えると、

＜仮定 II' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NH_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

問 4.　例えば、$N = 3, r = 2$ ならば、${}_3H_2 = 6$。これら 6 通りをすべて書き出せ。

この仮定は,「ボーズ-アインシュタインの統計」とよばれる（光子(ボーズ粒子）を取り扱うときに用いられる)。この場合実験に当う。

さらに、次の仮定を考える。

＜仮定 III ＞　1つの箱に玉は1つしか入らない

とする。この場合には重複を許さない組み合わせ ${}_NC_r$ 通りの場合がある。言い換えると、

＜仮定 III' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NC_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

この仮定は、電子や陽子（フェルミ粒子）を取り扱うときに用いられ,「フェルミ-ディラクの統計」とよばれる（この場合実験に当てはまる)。(物理では＜仮定 III ＞は,「パウリの排他原理」(異なる粒子は同時に同一状態を取ることはない）に対応する。)

問 5.　$N = 4, r = 3$ とする。仮定 I – III のもとで同等に確からしい場合を、各々すべて書き出せ。

上の仮定 II, III を現実離れしたものと思ってはいけない。

ある種の色盲の人は赤と緑の区別がつかない。青，赤，緑の3種類のランプ（発光ダイオード）を暗闇で等頻度で発光させるとする。この色盲の人には，赤のランプと緑のランプは区別がつかず，事象 $A =$「青が発光する」，事象 $B =$「赤（＝緑）が発光する」，の2つの事象に対して，$P(A \cup B) = 1, P(A) = 1/3, P(B) = 2/3$ と感じるであろう。

また，モンシロチョウは紫外線が見えるが，ヒトには紫外線が見えない。紫外線の発光によってある事象 A の発生が伝えられたとき，モンシロチョウには $P(A) > 0$ だとしても，ヒトには $P(A) = 0$ でなければ正しい確率と思われない（ヒトの目から見た実験に合わない)。

このように，何をもって「同等に確からしい」とするかは先見的には決まらない。確率は，光や熱のように物理量として実在するものではなく，我々の脳の中で「実験に合うように」設定されるものなのである。

第3章　ジャンプ型SDE

Let me have men about me that are fat; Sleek-headed men and such as sleep o' nights: Yond Cassius has a lean and hungry look; He thinks too much: such men are dangerous. W. Shakespeare, Julius Caesar, Act 1, Scene 2

この章ではジャンプのついた確率微分方程式 (SDE) について述べる。マルチンゲールおよびセミマルチンゲールの定義から始めて確率積分に至る。

3.1　マルチンゲールとセミマルチンゲール

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は次の (i), (ii) を満たすとき *usual condition* (通常の条件) をみたすという：

(i) $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の零集合を含む

(ii) 右連続である。

以下では usual condition を満たすフィルトレーションをもつ確率空間を考察する。

確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は、任意の t について X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であるとき **適合している** (*adapted*) という。関数 $X_\cdot : [0,t] \times \Omega$ が任意の $t \geq 0$ について $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測であるとき**プログレッシブに可測** (発展的可測) という。

càdlàg な軌跡をもつ適合過程 M_t は次をみたすとき**マルチンゲール**という：

(1) $M_t \in L^1(P),\ t \in \mathbf{T}$. つまり任意の $t \in \mathbf{T}$ に対し M_t は可積分であるということ：

$$E[|M_t|] < \infty \tag{3.1}$$

(2) $s \leq t$ ならば

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \qquad \text{a.s.}, \quad s,t \in \mathbf{T}. \tag{3.2}$$

ここで (2) の代わりに

(2)$'$ $s \leq t$ ならば

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s, \qquad \text{a.s.}, \quad s,t \in \mathbf{T}.$$

がなりたつときには、X_t は **劣マルチンゲール**という。

また、(2) の代わりに

(2)$''$ $s \leq t$ ならば

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s, \qquad \text{a.s.}, \quad s,t \in \mathbf{T}.$$

がなりたつときには、X_t は **優マルチンゲール**という。

確率変数 $\mathrm{T} : \Omega \to [0, +\infty]$ は、 任意の $t \in \mathbf{T}$ について $\{\mathrm{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ となるとき、 **停止時刻**という。停止時刻の全体を $\mathcal{T}$ とかく。

$0 = \mathrm{T}_0 \leq \mathrm{T}_1 \leq ... \leq \mathrm{T}_n \leq ...$ を停止時刻の列で $\mathrm{T}_n \to +\infty$ $a.s$ となるものとする。適合過程 M_t で、上のようなある停止時刻の列があって、任意の n について $M_{t \wedge \mathrm{T_n}}$ がマルチンゲールになるものを、**局所マルチンゲール**という。

マルチンゲールは局所マルチンゲールである。これは Doob の optimal sampling theorem による。

確率過程 X_t は、局所マルチンゲール M_t と、有界変動で càdlàg な適合過程 A_t で $A_0 = 0$ なるものを使って

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

とかけるとき、**セミマルチンゲール**という。マルチンゲールはセミマルチンゲールである。

1 次元 (標準)Poisson 過程 N_t はセミマルチンゲールである。ただし、標準とは $\lambda = 1$ という意味である。実際、

$$N_t = \tilde{N}_t + t,$$

とかける。ここで $\tilde{N}_t = N_t - t$ は局所マルチンゲール (実際はマルチンゲール) である。

ジャンプ型の Lévy 過程 $z(t)$ について、もし $\int_{\{|z|>1\}} |z|\mu(dz) < +\infty$ ならば 補償つき Lévy 過程 $\tilde{z}(t) = z(t) - \int_0^t ds \int z\mu(dz)$ は局所マルチンゲールであり

$$z(t) = \tilde{z}(t) + \int_0^t ds \int z\mu(dz)$$

と書ける。

また、そうでない場合でも

$$z(t) = \int_0^t \int_{\{z:|z|\le 1\}} z\tilde{N}(dsdz) + c't + \int_0^t \int_{\{z:|z|>1\}} zN(dsdz)$$

と書ける。ここで右辺第 1 項は局所マルチンゲールである。

3.1.1 セミマルチンゲールに関する確率積分

セミマルチンゲール X_t についての上の分解を使って、有界かつ (局所的に) 可予測過程 $h(u)$ に関する確率 (伊藤) 積分を

$$\int_s^t h(r)dX_r = \int_s^t h(r)dM_r + \int_s^t h(r)dA_r \qquad (2.3)$$

により定義する。

確率過程 $h(u)$ は、 $\Omega \times \mathbf{R}_+$ 上の σ 加法族 $\mathcal{P}$ に関し可測であるとき**可予測**という。ここで $\mathcal{P}$ は、左連続かつ右極限をもつ適合過程から生成される σ 加法族を表す。

$t \mapsto A_t$ は有界変動過程であるから、右辺第 2 項は通常の積分として定義できる。積分 $\int_s^t h(u)dM_u$ を以下のように定義する。

時間の列を $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$ とする。単純過程 $h(t)$ とは

$$h(t) = h_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

と表わされるものである。ここで h_i は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測かつ $|h_i| < +\infty$ a.s. となるものである。$\mathbf{S}$ で単純過程の全体を表す。位相は (t,ω) に関する一様収束の位相である。

単純過程 $h \in \mathbf{S}$ の、 càdlàg 軌跡をもつマルチンゲール M に関する確率積分 $I(h)$ を次で定義する：

$$I(h) = h(0)M_0 + \sum_{i=0}^{n} h_i(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

$I(h)$ を h の M **に関する確率積分**という。

$I(h)$ は次の性質をもつ。

(1) もし $M_t = W(t)$ (Brown 運動) ないし $M_t = \tilde{N}_t$ (補償つき Poisson 過程) ならば、 $I(h)(t)$ はマルチンゲールである。すなわち、

$$E[I(h)(t)|\mathcal{F}_s] = I(h)(s), \qquad s \le t$$

(2) $I^2(h)(t) - \int_0^t h^2(s)d[M]_s$ はマルチンゲールである。

(3) $E[I^2(h)(t)] = E[\int_0^t h^2(s)d[M]_s]$

ここで $[M]$ は M の **2 次変分**を表す (2 次変分については [25]Section II.6 を参照)。性質 (1) については [24] Proposition 2.5.7 を見よ。

性質 (1) は後で述べる「可予測表現性」(定理 6) に関連している。つまり、$dM_t = \phi(t)dW(t)$ ないし $dM_t = \phi(t)d\tilde{N}(t)$ と表現できれば、

$$I(h)(t) = \int_0^t h(s)dM_s = \int_0^t h(s)\phi(s)dW(s)$$

ないし

$$I(h)(t) = \int_0^t h(s)dM(s) = \int_0^t h(s)\phi(s)d\tilde{N}(s)$$

となり、$I(h)$ はマルチンゲールになる。

性質 (3) から、写像 $h \mapsto I(h)$ は、$L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ における適合過程から $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ への同相写像に拡張されることがわかる。

さらに $\mathbf{S}$ は $L^2(\Omega\times[0,+\infty), P\times d[M]_s)$ において稠密であり、$h \in L^2(\Omega\times[0,+\infty), P \times d[M]_s)$、可予測、の元は $\mathbf{S}$ の元で近似されることから、I は $I : L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s) \to \mathbf{D}$ に拡張される。ただし、ここで $\mathbf{D}$ は Skorohood 空間とよばれる、右連続、左極限をもつ道の全体を表す。この I を**確率積分**という。

まとめると、確率積分 $I(h), h \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ は次を満たす。

(1) 定数 α, β および $h, g \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ について

$$I(\alpha h + \beta g) = \alpha I(h) + \beta I(g), a.e.$$

(2) $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3$ に対し

$$\int_{t_1}^{t_3} h(t)dM_t = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dM_t + \int_{t_2}^{t_3} h(t)dM_t$$

(3) $t \mapsto I(h)(t)$ は適合過程である。

(4) $I(h)(0) = 0$ a.s.

(5) $M_t = W(t)$ または $M_t = \tilde{N}_t$ のとき、 $I(h)(t)$ はマルチンゲールであり、よって

$$E[I(h)(t)] = 0, \qquad t > 0$$

(6)

$$[I(h)]_t = \int_0^t |h(s)|^2 d[M]_s, \qquad [I(h), I(g)]_t = \int_0^t h(s)g(s)d[M]_s$$

以下では、 $(\mathcal{F}_t)$ は Lévy 過程 $z(t)$ によって生成され、 usual condition を満たすフィルトレーションとする。

次にランダム測度 $\tilde{N}$ の z 変数に関する積分を定義する。

$$\int \int_0^t h(s,z)\tilde{N}(dsdz)$$

は、単純可予測過程

$$h(t,z) = \sum_i \psi_i(z) 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

から始めて、

$$E[\int_0^t \int |h(s,z)|^2 ds\mu(dz)] < +\infty \tag{2.4}$$

なる可測な $h(t,z)$ を、各 z について単純可予測な過程で近似することにより定義される。ここで $[W]_t = t, [\tilde{N}]_t = t$ であるから、

$$I(h) = \int \int_0^t h(s,z)\tilde{N}(dsdz)$$

に対し

$$[I(h)]_t = \int \int_0^t |h(s,z)|^2 ds\mu(dz)$$

となる。

以下のマルチンゲール表現定理がなりたつ。$m = 1$ とする。

Theorem 6. *(Kunita-Watanabe 表現定理 cf. [10], [25] Theorem IV.43)* M_t を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に定義された局所 *2* 乗可積分マルチンゲールとする。可予測な *2* 乗可積分過程 $\phi(t), \psi(t,z)$ があって

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi(s) dW(s) + \int_0^t \int \psi(s,z) d\tilde{N}(ds\, dz)$$

がなりたつ。 ただし、$\mathcal{F}$ は $W(t)$ と $\tilde{N}(dtdz)$ を可測にする最小の σ-*field* である。

この性質を**可予測表現性**という。
証明省略。

3.2　ジャンプのある伊藤過程

$z(t)$ を $\mathbf{R}^m$ 値の Lévy 過程で、 Lévy 測度 $\mu(dz)$ をもち、その特性関数 ψ_t が

$$\psi_t(\xi) = E[e^{i(\xi, z(t))}] = \exp\left(t \int (e^{i(\xi,z)} - 1 - i(\xi,z) 1_{\{|z| \le 1\}}) \mu(dz) \right).$$

で与えられるものとする。

$$z(t) = (z_1(t), ..., z_m(t)) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z \left(N(ds\, dz) - 1_{\{|z| \le 1\}} \mu(dz) ds \right),$$

とかく。ここで $N(ds\, dz)$ は $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の平均測度 $ds \times \mu(dz)$ の Poisson ランダム測度である。Lévy 測度 μ の指数を β とする：

$$\beta = \inf \left\{ \alpha > 0; \int_{|z| \le 1} |z|^\alpha \mu(dz) < +\infty \right\}$$

以下しばらく

$$\int_{\{|z|>1\}} |z|^2 \mu(dz) < +\infty \tag{2.5}$$

を仮定する。

次の形の確率微分方程式 (SDE) を考察する。

$$\begin{aligned} X_t = x + \int_0^t b(X_{s-}) ds + \int_0^t f(X_{s-}) dW(s) \\ + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} g(X_{s-}, z) \tilde{N}(dsdz). \end{aligned} \tag{3.3}$$

以下、この形で表される確率過程を伊藤過程という。ここで次を仮定する:

$$|b(x)| + |f(x)| \le K(1 + |x|), \qquad |g(x,z)| \le K(z)(1 + |x|),$$

また、b, f, g は

$$|b(x) - b(y)| + |f(x) - f(y)| \le L|x - y|,$$

$$|g(x,z) - g(y,z)| \le L(z)|x - y|.$$

をみたす。ここで K, L は正定数、$K(z), L(z)$ は

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} \{K^p(z) + L^p(z)\}\mu(dz) < +\infty,$$

を満たす正値関数である。ただし、 $p \ge 2$。

Theorem 7. x は p 次可積分とする。$b(x)$, $f(x), g(x,z)$ に関する上の仮定のもとで、 *SDE* (3.3) は一意の解をもち、それは $L^p(\Omega)$ に属す。

証明省略 Protter [25] Sect. V.3 参照。

次に下の SDE を考察する。

$$x_t(x) = x + \int_0^t b(x_s(x))ds + \sum_{s \le t}^{c} \gamma(x_{s-}(x), \Delta z(s)), \tag{3.4}$$

ここで $\sum^c$ は補償された和である。すなわち、

$$\sum_{s \le t}^{c} \gamma(x, \Delta z(s)) = \lim_{\epsilon \to 0} \{ \sum_{s \le t, |\Delta z(s)| \ge \epsilon} \gamma(x, \Delta z(s)) - \int_0^t ds \int_{|z| \ge \epsilon} \gamma(x,z)\mu(dz)\},$$

cf. [9] Chapter II.

関数 $\gamma(x,z) : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^d$ および $b(x) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ は C^∞ 関数であり、そのすべての階数の導関数は有界であり、また $\gamma(x,0) = 0$ を満たすとする。

別の記法では

$$\begin{aligned} x_t(x) = x &+ \int_0^t b'(x_s(x))ds + \int_0^t \int_{|z| \le 1} \gamma(x_{s-}(x), z)\tilde{N}(dsdz) \\ &+ \int_0^t \int_{|z| > 1} \gamma(x_{s-}(x), z)N(dsdz) \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで $\tilde{N}$ は補償つき Poisson ランダム測度 $\tilde{N}(dsdz) = N(dsdz) - ds\mu(dz)$, $b'(x) = b(x) - \int_{|z|\geq 1}\gamma(x,z)\mu(dz)$ である。ここで $\gamma(x,z)$ の $1_{\{|z|\geq 1\}}d\mu(z)$ に関する可積分性は仮定されている。関数 γ は以下の形を仮定する：

$$\gamma(x,z) = \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0)z + \tilde{\gamma}(x,z) \tag{3.6}$$

ただし、 $\tilde{\gamma}(x,z) = o(|z|)$ as $z \to 0$。

更に以下を仮定する。

(A.0) ある $0 < \beta < 2$ と正定数 C_1, C_2 があって、$\rho \to 0$ なるとき

$$C_1\rho^{2-\beta}I \leq \int_{|z|\leq\rho} zz^T\mu(dz) \leq C_2\rho^{2-\beta}I$$

(A.1) (a) 任意の $p \geq 2$ と任意の $k \in \mathbf{N}^d \setminus \{0\}$ に対し

$$\int |\gamma(x,z)|^p\mu(dz) \leq C(1+|x|)^p, \quad \sup_x \int \left|\frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(x,z)\right|^p \mu(dz) < +\infty$$

ここで $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{N}^d \setminus \{0\}$ に対し

$$\frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_d}\gamma}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_d^{k_d}}$$

(b) ある $\delta > 0$ があって、任意の $z \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$\inf\left\{z^*(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0))(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0))^*z; x \in \mathbf{R}^d\right\} \geq \delta|z|^2$$

が成り立つ。

(A.2) ある $C > 0$ があって

$$\inf_{\substack{x\in\mathbf{R}^d,\\ z\in\mathrm{supp}\ \mu}} \left|\det\left(I + \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,z)\right)\right| > C$$

ただし、測度 μ に対し、

$$\mathrm{supp}\ \ \mu = \{\mathrm{cl}\}$$

条件 **(A.2)** は、 flow $\phi_{st}(x)(\omega) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d, x_s(x) \mapsto x_t(x)$ の存在を保証するものである。

第4章　マリアバン解析とその応用

You must take your chance, And either not attempt to choose at all Or swear before you choose, if you choose wrong Never to speak to lady afterward In way of marriage: therefore be advis'd. W. Shakespeare, The merchant of Venice, Act 2, Scene 1

この章では Wiener-Poisson 空間上の integration-by-parts formula を述べる。この際 Skorohod 積分 $\delta(Z)$ の評価が重要になる。

4.1 Poisson空間におけるIntegration-by-parts公式

Malliavin 解析を用いて、jump-diffusion 型の SDE の解の汎関数について、推移確率測度の絶対連続性と密度関数の絶対連続性について調べる。ジャンプ型の Malliavin 解析では、確率過程のジャンプ時またはジャンプの大きさと方向について摂動をとる。

以下では、 d 次元 Poisson 汎関数 F について integration-by-parts 公式を示すことを目的とする。すなわち、なめらかな確率変数 G について、F と G からきまる L^p-確率変数 $\mathcal{H}(F,G)$ がきまり、任意のなめらかな関数 ϕ について

$$E[\partial\phi(F)G] = E[\phi(F)\mathcal{H}(F,G)] \tag{4.1}$$

がなりたつ。公式 (4.1) を **integration-by-parts 公式**という。 この章では、上の公式がいろいろな "非退化" Poisson 汎関数についてなりたつことを示す。

この公式により、 F の確率法則になめらかな密度関数が存在することを導くことができる。$p_F(dx)$ を F の分布を表す確率法則とする。$p_F(dx)$

の Fourier transform $\hat{p}_F(v)$ は $E[\phi_v(F)]$ と書ける。ただし、 $\phi_v(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\exp(-i(x,v))$ である。ここに上の公式を、$\phi = \phi_v$, $G = 1$ として、k 回適用すると

$$E[\partial^k\phi_v(F)] = E[\partial^{k-1}\phi_v(F)\mathcal{H}(F,1)] = ... = E[\phi_v(F)\mathcal{H}(F,\mathcal{H}(F,\cdots,\mathcal{H}(F,1)))]$$

が得られる。任意の $v \in \mathbf{R}^d$ について $|\phi_v(F)| \le 1$ であるから、$\mathcal{H}(F,\mathcal{H}(F,\cdots,\mathcal{H}(F,1))) \in L^p$ ならば、ある正定数 C_k が存在して、任意の multi-index k について

$$|E[\partial^k\phi_v(F)]| \le C_k, \ \ \forall\ v \tag{3.2}$$

となる。

$\partial^k\phi_v = (-i)^k v^k \phi_v$ であるから、これより、各 k について

$$|v^k||\hat{p}_F(v)| \le C_k, \ \ \forall\ v$$

ただし、$\hat{p}_F(v) = E[\phi_v(F)]$。よって

$$\partial^l p_F(v) = (\frac{1}{2\pi})^d \int e^{i(x,v)} i^{|l|} v^l \hat{p}_F(v)dv$$

は $|l| < |k| - d$ なる各 l について well defined である。[26] Lemma (38.52) を見よ。

Fourier 変換の理論により、 このことは $p_F(dx)$ が密度関数をもち、上の積分は $\partial_x^l p_F(x)$ に等しいことが導かれる。

4.2　Poisson 空間と Picard の摂動

$U = \mathbf{T}\times(\mathbf{R}^m\setminus\{0\})$ 上の非負整数値測度で $\omega(\mathbf{T}\times\{0\}) = 0, \omega(\{u\}) \le 1$ for all u, かつ $\hat{N}(A) < +\infty$ なる任意の $A \in \mathcal{U}$ に対し $\omega(A) < +\infty$ となるもの全体を Ω_2 と書く。ここで $u = (t,z)$ は集合 U の要素を表す。 $\mathcal{U}$ は U 上の Borel σ-field であり、$\hat{N}(dtdz) = dt\mu(dz)$ である。

Ω_2 上の σ-field で、 $\omega(A) \in \mathcal{F}_2, A \in \mathcal{U}$ となる最小のものを $\mathcal{F}_2$ と書く。$(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 上の確率測度で $N(dtdz) := \omega(dtdz)$ が Poisson ランダム測度になるようなものを P_2 とする。確率空間 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_2)$ を **Poisson 空間**という。

関数 $\varphi(\rho)$ を

$$\varphi(\rho) = \int_{|z|\le\rho} |z|^2\mu(dz), \qquad \rho > 0$$

と定義する。次の **order** 条件がなりたつとする：

order 条件 ある $c > 0$ と $\alpha \in (0, 2)$ があって

$$\varphi(\rho) \geq c\rho^{\alpha} \quad \text{as} \quad \rho \to 0 \tag{$*$}$$

が成り立つ。ここで Lévy 測度 μ は Lebesgue 測度に関して特異であってもよい。

Remark. order 条件は Picard の摂動を用いる際の Lévy 測度への基本的要請である。 $2 - \alpha$ は特性指数とよばれる。べき α は原点の近傍における、 測度 μ の質量の集中のしかたを記述している。

以下では Poisson 空間 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ において確率変分 (Malliavin 解析) をおこなう。空間 Ω_2 の要素を (ω_2 でなく) ω と書く。
$u = (t, z)$ とし、$\hat{N}(du) = \hat{N}(dtdz)$, $\tilde{N}(du) = N(du) - \hat{N}(du)$ と書く。
可測空間 $(U \times \Omega_2,\ \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}_2)$ において、測度を

$$\mu^{+}(dud\omega) = N(\omega, du)P(d\omega), \qquad \mu^{-}(dud\omega) = \hat{N}(\omega, du)P(d\omega).$$

とおく。また $|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$ とおく。
Poisson 空間上に次のように差分作用素 $\tilde{D}_u, u \in U$ を導入する。
$u = (t, z) = (t, z_1, ..., z_m) \in U$ に対し $\varepsilon_u^{-} : \Omega_2 \to \Omega_2$ を

$$\varepsilon_u^{-}\omega(E) = \omega(E \cap \{u\}^c)$$

$\varepsilon_u^{+} : \Omega_2 \to \Omega_2$ を

$$\varepsilon_u^{+}\omega(E) = \omega(E \cap \{u\}^c) + 1_E(u).$$

と定義する。ここで $\varepsilon_u^{\pm}\omega = \omega \circ \varepsilon_u^{\pm}$ と書く。
ここで

$$\text{if } u_1 \neq u_2 \text{ then } \varepsilon_{u_1}^{\theta_1} \circ \varepsilon_{u_2}^{\theta_2} = \varepsilon_{u_2}^{\theta_2} \circ \varepsilon_{u_1}^{\theta_1}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \{+, -\}$$

および

$$\varepsilon_u^{\theta_1} \circ \varepsilon_u^{\theta_2} = \varepsilon_u^{\theta_1}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \{+, -\}$$

である。
$\mathcal{F}_2$ 可測な確率変数 F に対し差分作用素 $\tilde{D}_u$ を

$$\tilde{D}_u F = F \circ \varepsilon_u^{+} - F \tag{4.3}$$

と定義する。操作 ε_u^+ による P_2 の像は P_2 に関して絶対連続ではないので、各 u に対しては $\tilde{D}_u$ は well defined でない。しかし $\hat{N}(u)\otimes P_2$-a.s. には定義できる。

$\tilde{D}_u$ は差分作用素であるから、次の性質を満たす：

$$\tilde{D}_u(FG) = F\tilde{D}_uG + G\tilde{D}_uF + \tilde{D}_uF\tilde{D}_uG,\ a.s.$$

$\tilde{D} = (\tilde{D}_u)_{u\in U}$ の随伴作用素 $\tilde{\delta}$ は次のように与えられる。Z_u を $Z_u \in L^2(U\times\Omega_2, \mathcal{U}\otimes\mathcal{F}_2, \mu^-)$ かつ $\|Z\| < +\infty$ なるものとし、その全体を $\mathcal{Z}$ とする。

$Z\in\mathcal{Z}$ に対し

$$\tilde{\delta}(Z) = \int_U Z_u \circ \varepsilon_u^- \tilde{N}(du) \tag{4.4}$$

とおく。このとき次がなりたつ。$\mathcal{F}_2$ 可測な確率変数 F に対し

$$E[F\tilde{\delta}(Z)] = E\left[\int_U \tilde{D}_u F Z_u \hat{N}(du)\right] \tag{4.5}$$

(see [20] (1.12))

4.3 Wiener-Poisson 空間上の Sobolev 空間

4.3.1 Wiener 空間上の Sobolev ノルム

$\mathbf{K}_1 = L^2(\mathbf{T};\mathbf{R}^m)$ とする。$f = (f^1,\ldots,f^m)\in\mathbf{K}_1$ に対し

$$W(f) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbf{T}} f^i(s)dW^i(s).$$

とおく。$\mathcal{P}_1$ を

$$X = g(W(f_1),\cdots,W(f_n)),$$

の形に書ける確率変数 X の全体とする。ただし、 $g(x_1,...,x_n)$ は有界、$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-可測で、$(x_1,...,x_n)$ についてなめらかな関数である。ここで $n\in\mathbf{N}$。

X の Malliavin-Shigekawa 微分は m 次元確率過程であり

$$D_tX = \sum_{l=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_l}(W(f_1),...,W(f_n))f_l(t) \tag{3.6}$$

と定義される。作用素 $D : L^2(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \to L^2(\Omega_1; \mathbf{K}_1)$ は、閉かつ非有界な作用素である。$(t_1, ..., t_j) \in \mathbf{T}^j$ に対し $D^j_{t_1,...,t_j} = D_{t_1} \cdots D_{t_j}$ とおく。

l を非負整数、$p \geq 1$ とする。$X \in \mathcal{P}_1$ のノルム $|\cdot|_{0,l,p}$ を

$$|X|_{0,l,p} := \left(E[|X|^p] + \sum_{j=1}^{l} E\left[\left(\int_{\mathbf{T}^j} |D^j_{\mathbf{t}} X|^2 d\mathbf{t} \right)^{p/2} \right] \right)^{1/p} \tag{3.7}$$

とおく。ただし、 $D^j_{\mathbf{t}} = D^j_{t_1,...,t_j}$, $d\mathbf{t} = dt_1 \cdots dt_j$ である。$\mathbf{D}_{0,l,p}$ を $|\cdot|_{0,l,p}$ による $\mathcal{P}_1$ の完備化：

$$\mathbf{D}_{0,l,p} = \bar{\mathcal{P}_1}^{|\cdot|_{0,l,p}}.$$

とする。このとき $\mathbf{D}_{0,l,p} \subset L^p(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ であり、 作用素 $D^j, j = 1, ..., l$ は $\mathbf{D}_{0,l,p}$ 上に拡張される。

4.3.2 Poisson 空間上の Sobolev ノルム

$U = \mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ とし、$A(\rho) := \{u \in U\,;\, \gamma(u) \leq \rho\}$,
とする。ただし $\gamma(u) = |z|$ for $u = (t, z)$ である。Lévy 測度 μ は **order** 条件を満たすものとする。複合測度 $\hat{M}(du), \hat{M}(d\mathbf{u})$ および $\bar{M}(d\mathbf{u}; du)$ を次のように定義する。
対角線集合の外 $\{(\mathbf{u}, u) = (u_1, ..., u_k, u); u_i \neq u, i = 1, ..., k\}$ では

$$\begin{aligned}
\hat{M}(du) &:= \frac{1}{\varphi(1)} \gamma(u)^2 1_{A(1)}(u) \hat{N}(du), \\
\hat{M}(d\mathbf{u}) &= \hat{M}(du_1) \cdots \hat{M}(du_k), \\
\bar{M}(d\mathbf{u}; du) &= \hat{M}(d\mathbf{u}) \hat{M}(du)
\end{aligned}$$

さらに k 次元対角集合 $\{(\mathbf{u}, u) = (u_1, ..., u_k, u); \text{for some } i \ u_i = u\}$ 上で

$$\bar{M}(d\mathbf{u}; du) = \sum_{i=1}^{k} \hat{M}(d\mathbf{u}^{(i)}) \otimes \hat{M}(du) . \delta_{\{u_i = u\}}$$

とおく。ただし、 $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u} \setminus \{u_i\}$ を $(k-1)$-ベクトルとみなす。

$U \times \Omega_2$ 上の差分作用素 $\tilde{D}_u$ は Sect. 3.2 で導入された。作用素 $\tilde{D}$ viewed as that $\tilde{D} : L^2(\Omega_2) \to L^2(\Omega_2; \mathbf{K}_2)$ は閉作用素である (cf. [20], p.487 Remark)。たたし、 $\mathbf{K}_2 = L^2(U, \hat{N})$。

$\mathbf{u} = (u_1, ..., u_k) = ((t_1, z_1), ..., (t_k, z_k)) = (\mathbf{t}, \mathbf{z})$ とする。$|\mathbf{u}| = |\mathbf{z}| = \max_{1\le i\le k} |z_i|$ and $\gamma(\mathbf{u}) = |z_1| \cdots |z_k|$ と書く。 また $\varepsilon^+_{\mathbf{u}} = \varepsilon^+_{u_1} \circ \cdots \circ \varepsilon^+_{u_k}$ および $\tilde{D}_{\mathbf{u}} = \tilde{D}^k_{\mathbf{u}} = \tilde{D}_{u_1} \cdots \tilde{D}_{u_k}$ と定義する。

作用素 $\tilde{D}$ に関する計算規則。

$$\tilde{D}(XY) = (\tilde{D}X)Y + X(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y) \tag{4.1}$$

$$X \circ \varepsilon^+_u = \tilde{D}_u X + X \tag{4.2}$$

(4.1) より

$$\begin{aligned}\tilde{D}^2(XY) =& \tilde{D}(\tilde{D}(XY)) \\ =& \tilde{D}\{(\tilde{D}X)Y + X(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)\} \\ =& (\tilde{D}^2X)Y + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}^2X)\tilde{D}Y \\ & + \tilde{D}X\tilde{D}Y + X\tilde{D}^2Y + \tilde{D}X\tilde{D}^2Y \\ & + (\tilde{D}^2X)\tilde{D}Y + (\tilde{D}X)\tilde{D}^2Y + (\tilde{D}^2X)(\tilde{D}^2Y)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\tilde{D}(XYZ) =& \tilde{D}((XY)Z) \\ =& \tilde{D}(XY)Z + XY\tilde{D}Z + \tilde{D}(XY)\tilde{D}Z \\ =& (\tilde{D}X)YZ + X(\tilde{D}Y)Z + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)Z + XY\tilde{D}Z \\ & + (\tilde{D}X)Y(\tilde{D}Z) + X(\tilde{D}Y)(\tilde{D}Z) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)(\tilde{D}Z)\end{aligned}$$

(4.1) を使うことにより

$$\tilde{D}_u(XY) = (XY) \circ \varepsilon^+_u - XY = (X \circ \varepsilon^+_u)(Y \circ \varepsilon^+_u) - XY$$

を確認できる。また、 (4.2) より

$$\begin{aligned}X \circ \varepsilon^+_{u_1} \circ \varepsilon^+_{u_2} =& (X \circ \varepsilon^+_{u_1}) \circ \varepsilon^+_{u_2} \\ =& (\tilde{D}_{u_1}X + X) \circ \varepsilon^+_{u_2} \\ =& \tilde{D}_{u_2}(\tilde{D}_{u_1}X + X) + \tilde{D}_{u_1}X + X \\ =& \tilde{D}_{u_2}\tilde{D}_{u_1}X + \tilde{D}_{u_2}X + \tilde{D}_{u_1}X + X\end{aligned}$$

一般には $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_k)$ に対し

$$\tilde{D}_{\mathbf{u}}\{X_1 \cdots X_n\} = \sum_{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n \subset \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{u}_n = \mathbf{u}} \tilde{D}_{\mathbf{u}_1}X_1 \cdots \tilde{D}_{\mathbf{u}_n}X_n.$$

ただし、和は空集合の場合も含む。

次の “連鎖律” がなりたつ。

Lemma 2. F および連続な φ で $\varphi(F) \in L^p(\Omega_2)$, $\varphi(F+\tilde{D}_u F) \in L^2(U \times \Omega_2)$ なるものに対し

$$\tilde{D}_u \varphi(F) = \varphi(F \circ \varepsilon_u^+) - \varphi(F) = \varphi(F + \tilde{D}_u F) - \varphi(F). \tag{4.10}$$

証明は [19] Theorem 12.8 を見よ。

この作用素 $\tilde{D}$ により、ノルム

$$|F|_{k,0,p} := \left(|F|_{0,0,p}^p + \sum_{k'=1}^{k} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left| \frac{\tilde{D}_{\mathbf{u}}^{k'} F}{\gamma(\mathbf{u})} \right|^p \hat{M}(d\mathbf{u}) \right] \right)^{1/p}$$

を導入する。ただし、 $k = 1, 2, ...,$ および $p \geq 1$ とする。

$\varphi \in C_0^\infty(U)$ に対し

$$N(\varphi) = \int_U \varphi(t,z) N(dt\, dz),\ \tilde{N}(\varphi) = \int_U \varphi(t,z) \tilde{N}(dt\, dz)$$

とおく。$\mathcal{P}_2$ を

$$X = f(\tilde{N}(\varphi_1), \cdots, \tilde{N}(\varphi_n))$$

と書ける確率変数 X の全体とする。ただし、 $f(x_1, ..., x_n)$ は、有界、$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-可測かつ $(x_1, ..., x_n)$ に関してなめらかな関数である。

$\mathbf{D}_{k,0,p}$ を空間 $\mathcal{P}_2$ のノルム $|\cdot|_{k,0,p}$ に関する完備化とする：

$$\mathbf{D}_{k,0,p} = \bar{\mathcal{P}_2}^{|\cdot|_{k,0,p}}$$

このとき $\mathbf{D}_{k,0,p} \subset L^p(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ であり、 $\tilde{D}_{\mathbf{u}}^j$, $(\mathbf{u} = (u_1, ..., u_j), j = 1, ..., l)$ は $\mathbf{D}_{k,0,p}$ 上に拡張される。

$\tilde{D}_u$ の $L^2(\mathbf{T} \times \Omega_2)$ における随伴作用素 $\tilde{\delta}$ は Sect. 3.2 で導入された。

ランダム場 $V = V_u$ で、 $V_{(t,0)} = 0$ となり $\tilde{N} = N - \hat{N}$ に関して可積分なもののノルムを、$k = 0$ のとき

$$\|V\|_{0,0,p}^{\sim} = E\left[\int_{A(1)} \left| \frac{V_u}{\gamma(u)} \right|^p \hat{M}(du) \right]^{1/p}, \tag{4.11}$$

$k \geq 1$ のとき

$$\|V\|_{k,0,p}^{\sim} = \left\{ \|V\|_{0,0,p}^{\sim p} + \sum_{k'=1}^{k} E\left[\int_{A(1)^{k'} \times A(1)} \left| \frac{\tilde{D}_{\mathbf{u}}^{k'} V_{\mathrm{u}}}{\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathrm{u})} \right|^p \bar{M}(d\mathbf{u}; d\mathrm{u}) \right] \right\}^{1/p} \tag{4.12}$$

により定義する。

$\chi_\rho = 1_{A(\rho)}$ とおく。次の不等式が成り立つ：

Theorem 8 (Theorem 3.2 in [6])**.** k を非負整数、 $p \geq 2$ を偶数とする。正定数 $c = c(k,p)$ があって任意の $s \geq 2$ と $0 < \rho < 1$ に対し

$$|\tilde{\delta}(V\chi_\rho)|_{k,0,p} \leq c\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}}\|V\chi_\rho\|^{\sim}_{k+p,0,(k+p)s} \tag{4.13}$$

が任意の V についてなりたつ。

4.3.3 Wiener-Poisson 空間上の Sobolev ノルム

$(\Omega, \mathcal{F})$ を積空間 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ とし、$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ と書く。積確率測度 $P = P_1 \otimes P_2$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ で考える。フィルトレーション $\mathcal{F}$ の P に関する完備化を $\bar{\mathcal{F}}$ と書く。部分 σ-fields $\mathcal{F}_1 \otimes \{\phi, \Omega_2\}$, $\{\phi, \Omega_1\} \otimes \mathcal{F}_2$ は、各々$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ と同一視される。空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は *Wiener-Poisson* 空間とよばれる。以下 $W(t)(\omega) = W(t)(\omega_1) = \omega_1(t), N(dtdz)(\omega) = N(dtdz)(\omega_2) = \omega_2(dtdz)$ と書くこともある。

$\mathbf{K} := \mathbf{K}_1 \oplus \mathbf{K}_2$ とする。$\mathbf{K}$ は

$$(h_1, h_2) = (f_1, f_2)_{\mathbf{K}_1} + (g_1, g_2)_{\mathbf{K}_2}$$

を内積とするヒルベルト空間になる。ただし、 $h_i = f_i \oplus g_i \in \mathbf{K}$。以下では D_t, $\tilde{D}_u$ を各々 $D_t \oplus id$, $id \oplus \tilde{D}_u$ と同一視する。作用素 $\varepsilon^{\pm}_u$ は次のようにして Ω 上に拡張される：$\varepsilon^{\pm}_u(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \varepsilon^{\pm}_u \omega_2)$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ とする。空間 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ を各々 $\mathcal{P}_1 \oplus 1, 1 \oplus \mathcal{P}_2$ と同一視する。$p \geq 2$ に対し

$$\mathbf{D}_{k,l,p} = \bar{\mathcal{P}}^{|\cdot|_{k,l,p}}$$

ただし、

$$|F|_{k,l,p} := \left(|F|^p_{0,l,p} + \sum_{k'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left(\int_{\mathbf{T}^{l'}} \left| \frac{D^{l'}_{\mathbf{t}} \tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}} F}{\gamma(\mathbf{u})} \right|^2 d\mathbf{t} \right)^{p/2} \hat{M}(d\mathbf{u}) \right] \right)^{1/p}$$

作用素 $\mathcal{D}_{(t,u)} = D_t \oplus \tilde{D}_u$ は連続的に $\mathbf{D}_{k,l,p}$ 上に拡張される。

$$\mathbf{D}_\infty = \bigcap_{k,l=0}^{\infty} \bigcap_{p \geq 2} \mathbf{D}_{k,l,p}$$

とおく。

さらに、随伴作用素 $\delta, \tilde{\delta}$ も各々 $\delta \otimes id$, $id \otimes \tilde{\delta}$ と同一視する。ここで δ は

$$E[F\delta(U.)] = E[\int_{\mathbf{T}} D_t F U_t dt]$$

によって定義される。こうして作用素 $\bar{\delta}$ を

$$\bar{\delta} = \delta \oplus \tilde{\delta}.$$

と定義する。このとき (3.5) などから次がなりたつ：

Proposition 5. $Z = U_t \oplus V_u \in L^2(\Omega\,; \mathbf{K})$ とし、$V_{(t,0)} = 0$, $U_t \in Dom(\delta)$, $V_u \in Dom(\tilde{\delta})$ を仮定する。このとき任意の $H \in \mathbf{D}_{1,1,2}$ に対し

$$E[H\bar{\delta}(Z)] = E[\int D_t H\, U_t\, dt + \int \tilde{D}_u H\, V_u\, \hat{N}(du)]. \tag{4.14}$$

次にノルム $\|\ \|_{k,l,p}$, $\|\ \|^{\sim}_{k,l,p}$ を導入する。$U_t \in L^2(\Omega; \mathbf{K}_1)$ に対し

$$\|U\|_{k,l,p} := \left(\|U\|^p_{0,l,p} + \sum_{k'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left(\int_{\mathbf{T}^{l'+1}} \left| \frac{D^{l'}_{\mathbf{t}} \tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}} U_t}{\gamma(\mathbf{u})} \right|^2 d\mathbf{t} \right)^{p/2} \hat{M}(d\mathbf{u}) \right] \right)^{1/p}. \tag{4.15}$$

$V_u \in L^2(\Omega; \mathbf{K}_2)$ で $V_{(t,0)} = 0$ なるものに対し、$k = 0$ の場合

$$\|V\|^{\sim}_{0,l,p} = \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)} \left[\int \left| \frac{D^{l'}_{\mathbf{t}} V_u}{\gamma(u)} \right|^2 d\mathbf{t} \right]^{\frac{p}{2}} \hat{M}(du) \right]^{1/p} \tag{4.16}$$

$k \geq 1$ の場合

$$\|V\|^{\sim}_{k,l,p} \;=\; \left\{ \|V\|^{\sim p}_{0,0,p} + \sum_{k'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'} \times A(1)} \left[\int \left| \frac{D^{l'}_{\mathbf{t}} \tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}} V_{\mathrm{u}}}{\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathrm{u})} \right|^2 d\mathbf{t} \right]^{\frac{p}{2}} \bar{M}(d\mathbf{u}; d\mathrm{u}) \right] \right\}^{1/p}$$

とおく。$Z = U_t \oplus V_u$ に対しては

$$\|Z\|_{k,l,p} := (\|U\|^2_{k,l,p} + \|V\|^{\sim}_{k,l,p}{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

とする。

また空間を $n \geq 0, p \geq 2$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}^{\sim(1)}_{k,l,p} &= \{U_t \in L^2(\Omega; \mathbf{K}_1)\,;\, \|U\|_{k,l,p} < +\infty\} \\
\mathbf{D}^{\sim(2)}_{k,l,p} &= \{V_u \in L^2(\Omega; \mathbf{K}_2)\,;\, V_{(t,0)} = 0, \|V\|^{\sim}_{k,l,p} < +\infty\} \\
\mathbf{D}^{\sim}_{k,l,p} &= \mathbf{D}^{\sim(1)}_{k,l,p} \oplus \mathbf{D}^{\sim(2)}_{k,l,p} \\
\mathbf{D}^{\sim}_{\infty} &= \bigcap_{k,l=0}^{\infty} \bigcap_{p \geq 2} \mathbf{D}^{\sim}_{k,l,p}
\end{aligned}
$$

と定義する。

次の補題は随伴作用素の評価を与える。

Lemma 3. k, l を非負整数、 $p \geq 2$ を偶数とする。

(i) $U = \{U_t\} \in \mathbf{D}^{\sim(1)}_{k.l,p}$ とする。ある正定数 $c = c(k,l,p)$ があって

$$
|\delta(U)|_{k,l,p} \leq c\|U\|_{k,l+1,p} \tag{4.3}
$$

(ii) $V = \{V_u\} \in \mathbf{D}^{\sim(2)}_{k.l,p}$ とする。 ある正定数 $c = c(k,l,p)$ があって、任意の $s \geq 2$ と $0 < \rho < 1$ に対し

$$
|\tilde{\delta}(V\chi_\rho)|_{k,l,p} \leq c\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}} \|V\chi_\rho\|^{\sim}_{k+p,l,(k+p)s} \tag{4.4}
$$

がなりたつ。

ここで δ は $Wiener$ 空間上の D_t の随伴作用素である：

$$
E[\int_{\mathbf{T}} D_t f(W(h))u(t)dt] = E[f(W(h))\delta(u)]
$$

関連図書

[1] Bichteler K, Gravereaux JM, Jacod J. Malliavin Calculus for Processes with Jumps. New York, USA, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[2] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York, USA, Wiley-Interscience, 1999.

[3] Hoh W, Jacob N. Some Dirichlet forms generated by pseudo differential operators. Bull Sci Math 1992, 116, 383–398.

[4] Ishikawa Y. On the lower bound of the density for jump processes in small time. Bull. Sc. math 1993, 117, 463–483.

[5] Ishikawa Y. Density estimate in small time for jump processes with singular Lévy measures. Tohoku Math J 2001, 53, 183–202.

[6] Ishikawa Y, Kunita H. Malliavin calculs on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps. Stochastic Process. Appl 2008, 116, 1743–1769.

[7] Itô K. Kakuritsu-ron, I–III. (in Japanese) [Probability theory, I–III.] 2nd ed. Tokyo, Japan, Iwanami Shoten, 1983.

[8] Itô K. Stochastic Processes : Lectures given at Aarhus University, Berlin, Germany, Springer, 2004.

[9] Jacod J. Calcul stochastique et problèm des martingales. Lect Notes in Math 714. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1975.

[10] Kunita H, Watanabe S. On squqre integrable martingales. Nagoya Math J 1967, 30, 209–245.

[11] Kunita H. Stochastic differential equations with jumps and stochastic flows of diffeomorphisms. In: Ikeda N., ed. Itô's stochastic calculus and probability theory. Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 1996, 197–211.

[12] Kunita H. Stochastic differential equation based on Lévy processes and stochastic flows of diffeomorphisms. In: Rao, MM., ed. Real and stochastic analysis. Boston, USA, Birkhauser, 2004, 305–373.

[13] Kunita H. Analysis of nondegenerate Wiener-Poisson functionals and its application to Itô's type SDE with jumps. Sankhya 2011, 73-A, 1–45.

[14] Kurtz TG, Pardoux E, Protter P. Stratonovich stochastic differential equations driven by general semimartingales. Ann Inst Henri Poincaré 1995, 31, 351-377.

[15] Léandre R. Densité en temps petit d'un processus de sauts. In: Azéma J, Meyer PA, Yor M., eds. Séminaire de Proba 21, Lecture Notes in Math 1247. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1987, 81–99.

[16] Mizohata S. The theory of partial differential equations. Cambdirge, UK, Cambdirge Univ Press, 1973.

[17] Marcus SI. Modeling and approximation of stochastic differential equations driven by semimartingales. Stochastics 1980/81, 4, 223–245.

[18] Nualart D, Vives J. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In: Azéma J, Meyer PA, Yor M., eds. Séminaire de Probabilités 24, Lecture Notes in Math 1426. Berlin, Germany, Springer 1990, 154–165.

[19] Di Nunno G, Øksendal B, Proske F. Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. Berlin, Germany, Springer, 2008.

[20] Picard J. On the existence of smooth densities for jump processes. Probab Th Relat Fields 1996, 105, 481–511. Erratum : ibid 2010, 147, 711–713.

[21] Picard J. Formules de dualité sur l'espace de Poisson. Ann Inst Henri Poincaré 1996, 32, 509–548.

[22] Picard J. Density in small time for Lévy processes. ESAIM Probab Statist 1997, 1, 358–389 (electronic).

[23] Picard J. Density in small time at accessible points for jump processes. Stochastic Process Appl 1997, 67, 251–279.

[24] Privault N. Stochastic analysis in discrete and continuous settings with normal martingales. Lecture Notes in Math 1982. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2009.

[25] Protter Ph. Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2005.

[26] Rogers LCG, Williams D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales : Itô Calculus. Cambridge, UK, Cambridge Univ Press, 2000.

[27] Sato K. Additive Processes (in Japanese). Tokyo, Japan, Kinokuniya, 1990 ; English version: Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge, UK Cambridge University Press, 1999.

[28] Watanabe S. Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels. Ann Probab 1987, 15, 1–39.

[29] Yoshida N. Conditional expansions and their applications. Stochastic Process Appl 2003, 107, 53–81.