

# 情報科学演習 第13回

## 数式処理系 Maple 入門

### 1 はじめに

今回は数式処理系 Maple を紹介します。前回、リモートで情報基盤統括センターのマシンを使いましたが、それをを利用して、リモートから maple を使います。maple 自身、グラフィカルな環境でも利用でき、その場合には関数のグラフを描画させるなどの機能もあります。しかし、今回はそのような環境が利用できないので、純粋に数式の計算法を述べます。

数式処理とは、数学で行う計算、即ち、式の展開、因数分解、微分、積分、方程式を解く、逆行列を求める、固有値計算等を数式のままコンピュータでする事を指します（数式を美しく印刷する作業を数式処理と言う人もいますが、通常はこちらは組版（くみはん）処理といいます）。

現在のコンピュータが開発（von Neumann 型の完成が 1950 年前後）からあまり間をおかず（1960 年台半ば）、数式処理システムの開発が始まっています。もっとも早い時期の AI(Artificial Intelligence、人工知能) のひとつであるとも言えます。

実際 Maple, Mathematica, Maxima(sage, Macsyma), Reduce 等の数式処理ソフトは、大学初年級以上の数学を処理する能力を持っており、数学教育で用いるソフトとして便利ですし、研究上の実験ソフトとしても役に立ちます。

今回は、大学に導入されている Maple(これは有料のソフトウェア) をリモートで使ってみます。このテキストの最後に、無料の数式処理ソフトである Maxima の導入法を書きました。

### 2 Maple とは

Maple は、Canada の Waterloo 大学で開発された数式処理ソフトです。Maple は、沖縄では見ませんが、楓という木の事です。Canada 国旗の中央部には楓の葉がデザインされています<sup>1</sup>。現在、Waterloo Maple Inc. が販売しております。サポートされている OS は、MacOS, Windows, Solaris, Linux (x86) 等です。

Maple の開発は、1980 年頃に始まったようです。ただし、数式処理が PC で実行可能になって来たのは 1990 年頃からで、それまでは、Workstation と呼ばれる少し大きめのシステムでしか、動作しませんでした（現在では、Workstation と PC の差はほとんどなくなっている。）。

**このテキストでの約束:** このテキストでは、> で始まっている行は、Maple の入力です。

Maple は一般ユーザ版は 20 万円以上しますが、学生版 (Student Edition) は、12000 円（税抜き？）で購入出来るようです。

---

<sup>1</sup>個人的には、パンケーキのシロップは、メイプルシロップ。

### 3 Maple の起動

前回同様、コマンドラインで `cc.u-ryukyu.ac.jp` に `ssh` を用いて接続します。コマンドプロンプト (Windows 10), ターミナル (ターミナル.App)(Mac や ChromeOS) で、次を入力してください (`e2131xx` の部分は、自分の login 名を入力)。

```
ssh cc.u-ryukyu.ac.jp -l e2131xx
```

前回の講義を実行している人は、`password` 入力になりますが、飛ばした人は、接続を続行するか (認証) に対する質問が出ますので、`yes` とタイプしてエンターを押すと、`password` 入力となります。

例によって、`password` は画面表示されません。`password` は 3 回間違えると、接続が自動的に切れます。その際には、上を入力して再接続してください。上の `ssh` で、`-l` に続く部分は、login 名ですが、ここを間違えた場合は、`CTRL-c`(Control キーを押しながら c を押す) で、`ssh` の実行が中止できます。

`cc.u-ryukyu.ac.jp` に接続を完了しますと、コマンドプロンプトが現れますので、`maple` とタイプして ENTER を押します。

```
[e2131xx@cc51 ~]$ maple
```

次のような `maple` からの起動メッセージが表示されます。左側のアスキーアート (アスキー文字で絵を描いたもの) は、Canada の国旗の中央にある楓の葉を真似たものです。Windows の場合は、\ が ¥ で表示されると思います。

```
\^/|      Maple 2020 (X86 64 LINUX)
._\|_  _/_\. Copyright (c) Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2020
 \ MAPLE / All rights reserved. Maple is a trademark of
 <---- ----> Waterloo Maple Inc.
           |      Type ? for help.
>
```

この状態で、`maple` を用いた計算が対話的に実行できます。

#### 3.1 簡単な計算

Maple の四則演算の記号はそれぞれ、`+, -, *, /` です。Maple では冪乗と階乗が定義されており、それぞれ、`^` と `!` を用います。Maple では、計算式の最後をセミコロン ; で終って ENTER キーを押すと、計算式の評価結果が出力されます。ENTER キーだけでは単なる改行となります。セミコロンを忘れて ENTER キーを押した場合、次の行で改めてセミコロンを押してエンターを押せば、式は計算されます。入力間違いがあって `error` が表示された場合も、気にせずに使い続けて下さい。式の中の括弧 ( ) は数学と同じ意味になります。四則演算の優先順位も数学と一致します。次ページの先頭部分を実行してみて下さい。

```

> 1 + 2;
> 10/3 + 2;
> 10/3.0;
> 2^10;
> 50!;
> (a+a-b)*c/d;
> a^2 + a;

```

有理数の扱い、文字式の扱いが数学と一致します。小数が式に含まれていれば、自動的に小数扱いされます。

### 3.2 様々な定数、手続き(函数)

Maple では、数式処理のための手続きが 2700 以上定義されています。それらを全部解説する事は不可能ですので、ここではその一例をあげます。これらの例の中に初等函数が用いられていますが、それらの意味は容易に類推できると思いますので、これについての解説はいちいちしません。

数式処理に欠かせない定数(円周率等)が既に定義されています。円周率は、Pi という記号を使います。関数に値を代入する時には、必ず括弧()が必要で、しかも数式計算上の括弧は、これ以外には使えません。{},[]は別の意味になります。

```

> Pi;
> cos(Pi/4);
> tan(Pi/2);
> arctan(-infinity);

```

$\sqrt{2}$  がそのまま出て来る事、tan の不定値に対するエラーメッセージに注意して下さい。arctan は逆正接函数、infinity は無限大の事です。最後の答は、極限値を出力しています。

Maple では、有理数、幕根、円周率等の定数は、そのまま出力されます。上の逆正接函数の計算でもそうですし、例えば、 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  も次で計算させると、円周率を使った答が出ます。

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity);
```

これを小数へ変換するには、evalf(evaluate float) という手続きを用います。

```
> evalf(Pi^2/6);
```

Maple では、非常に正確な数値計算ができます。例えば、 $e^{\pi\sqrt{163}} - 744 - 640320^3$  を C 言語の数学関数で計算しますと -480 という答を得ます。Maple を使うと、C 言語の計算がとんでもない誤差を含む事がわかります。起動時では、浮動小数点の仮数部は 10 衔に設定されており、そのままですると、この結果は真の値の約 40 倍という答になります。そのため仮数部の桁数を事前に設定します。仮数部の桁数は、Maple のシステム変数 Digits に格納されていますから、この値を変更します。Maple では変数への代入に := を用います。

```

> Digits:=50;
> evalf(exp(Pi*sqrt(163)));
> evalf(exp(Pi*sqrt(163))-744-640320^3);

```

$e^{\sqrt{163}\pi}$  の計算結果で 9 が 12 個続く部分がありますが、先頭の 9 と 2 番目の 9 の間に小数点があります。C 言語のライブラリを用いた計算が、真の値の  $6 \times 10^{14}$  倍以上の値になっている事がわかります。(exp は exponential の略)

**課題 (難):**  $e^{\sqrt{163}\pi}$  の値が整数に近い理由を調べよ。昔にこれをきちんと説明できる人は、卒業まで私が担当する科目的全ての単位を(授業登録すれば) A であげます。(同じ理由で,  $e^{\sqrt{67}\pi}$  も整数に近い。)

文字式の展開、因数分解も可能です。

```
> expand((x+y)^5);
> factor(a^8-b^8);
```

次の問題は、2000 年の琉球大学入学試験問題前期日程数学甲の 1 です。

1. 関数  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  を微分せよ。
2. 不定積分  $\int x\sqrt{x^2+2} dx$  を求めよ。
3. 定積分  $\int_{\frac{1}{e}}^{2e} x^3 \log x dx$  を求めよ。
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1 - x}{x^2}$  を求めよ。

このような単純な計算は、Maple は得意です。(試験では、答だけを書いても満点にはならないと思います。) Maple V では、直前の結果を % で参照できます。

```
> diff(x/sqrt(1+x^2),x);
> simplify(%);
> int(x*sqrt(x^2+2),x);
> int(x^3*log(x), x=exp(-1)..2*exp(1));
> limit((sqrt(2*x+1)-1-x)/x^2, x=0);
```

方程式  $f(x) = 0$  の解を求める様々な方法も Maple には用意されています。 $f(x)$  が 4 次以下の多項式なら、この方程式には代数的な解法が存在する事が知られています。(3 年の代数学 I・II で勉強する予定です。) Maple はこれらの解法を知っており、solve という手続きになっています。次を実行してみて下さい。これらの解には複素数が含まれますが、Maple では虚数単位は大文字の I で表示されます。

```
> solve(x^3+1,x);
> solve(x^3+3*x+1,x);
```

5 次以上の方程式には、代数的な解法が一般には存在しない事が知られています(代数的という制限を外せば、別な解法はあります)。次を実行してみてください。

```
> solve(x^5+x^2+1, x);
```

`RootOf(_Z5 + _Z2 + 1)` という解が出て来ます。もちろん、これは単なるトートロジーに過ぎないので、Maple は代数的数を扱えるので、この解（代数的数）を用いた計算が今後記号的に可能です。

代数的な解法がある場合でも、その解法が複雑な場合には、残念ながら代数的な解を出力しません。例えば、1 の 7 乗根を計算させようとしても、de Moivre (ドモアブル) の公式から出てくる解が単純に出力されるだけです。

```
> solve(x^7-1, x);
```

上で述べたように Maple では、代数的数が扱えます。これを利用すると、 $x^7 - 1 = 0$  の代数的な解も求める事ができます。 $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  ですが、積の右側の 6 次式は  $\sqrt{-7}$  を使うと、2 つの 3 次式の積に因数分解されます。この様な因数分解は、付け加える数を `factor` の第 2 引数に加える事で可能です。

```
> factor(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1, (-7)^(1/2));
```

従って、1 の複素 7 乗根は、次のベキ根だけを利用して記述すると、2 つ方程式の解全体です。

```
> solve(2*x^3+x^2-I*sqrt(7)*x^2-x-I*sqrt(7)*x-2, x);
> solve(2*x^3+x^2+I*sqrt(7)*x^2-x+I*sqrt(7)*x-2, x);
```

$f(x)$  が 5 次以上の多項式や、多項式以外の場合には、一般的な解法が存在しません。このような方程式の近似解を数値的に計算する方法も Maple は知っています。上方程式の数値解も、次で計算してくれます。

```
> fsolve(x^5+x^2+1, x);
```

### 3.2.1 パッケージ (package) を利用する

これまでの計算では、特別な事をせずともそれを実行しますが、行列の計算などはそのままでは実行してくれず、それを計算するためのパッケージ（ライブラリ）を呼び出す必要があります。ここでは、線形代数学のパッケージを呼び出して、そこで定義されている計算をしてみます。

パッケージを読み込むには `with` という手続きを使います。線形代数学のパッケージ名は `linalg` となっておりますので、次のように入力します。

```
> with(linalg);
```

この時に出力されるのが、`linalg` のパッケージで定義されている手続き名です。一例をあげますと、次のようにになります。

```
> B:= matrix(2,2);
> trace(B);
> det(B);
> inverse(B);
> eigenvalues(B);
```

どのようなパッケージが利用できるかは、手続き `help` に引数 `package` をいれて利用する事でわかります。ただし、この環境では出てくるメッセージは英語です。

```
> help(packages);
```

多量のメッセージが現れ、1画面には表示されません。最下行に-- More: packages -- (色が反転している)と出て来たら、スペースキーを押すと、1画面進みます。Help メッセージの表示の終了は、q キーを押します。

### 3.3 Help

上にあるように、Maple は Help 機能があり、英語が読めれば割と有用です。グラフィカルな環境では、Help も日本語訳が付いているようです。使い方は、

```
> ? キーワード
```

あるいは

```
> help(キーワード);
```

とすると、それに対する Help が表示されます。例えば、

```
> help(diff);
```

とすると、微分するコマンド diff の使い方が表示できます。検索すべきキーワードが何であるかというのは、他の数学の講義から学習してください。

```
> help(help);
```

### Maple の終了

Maple の利用を終了するには、次のように入力します。

```
> quit;
```

cc.u-ryukyu.ac.jp との接続を切るには、Maple を終了した後、

```
[e2131xx@cc51 ~]$ logout
```

で、logout します。logout せずにターミナルなりコマンドプロンプトを終了しても、特に問題は起きません。

このような数学用ソフトやプログラミング言語の記述、あるいはそのエラーメッセージは、ほとんどの場合英語になります。それは、これらが世界中で開発されており、そのときの共通言語が英語になってしまったからです。そのような英語のメッセージを日本語訳は、なされていないのが多くあります。従って、英語に対するアレルギーをなくすとともに、そのメッセージを読む訓練をしておくことは、将来の役に立ちます。文学のような難しい表現はありませんので、はやいうちに慣れて下さい。また、微積や線形代数の教科書の問題を Maple で解いてみて下さい（解答にそこそこ間違いがあったりして…）。

2002 年の計算機言語 I で Maple を用いたプログラミングの講議を行いました。そのときのテキストが (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ファイルですが)、次の場所にあります。今回のテキストは、そこにある 1.tex を改訂した物です。使い方をより知りたい方は、参考にして下さい。Maple の version が当時から大分上がっていますが、内容は今でもほとんど通用するはずです。来年の計算機概論 I でも、もう一度 Maple を取り上げる予定です。

<ftp://ftp.math.u-ryukyu.ac.jp/pub/gengo/2002/>

## 参考文献

- [1] B. W. Char 他, サイバネットシステム訳, はじめての Maple, 1998, シュプリンガーフェアラーク東京
- [2] B. W. Char 他, サイバネットシステム訳, よくわかる Maple, 1998, シュプリンガーフェアラーク東京
- [3] K. M. Heal, M. Hansen, K. Rickard 著, 示野信一他訳, Maple V Release 5 ラーニングガイド, 1999, シュプリンガーフェアラーク東京
- [4] 示野信一著, Maple V で見る数学ワールド, 1999, シュプリンガーフェアラーク東京

Maple の使い方の参考書です. どれも古い本なので今とは少し使い方が異なる部分もありますが, そのときには Help で調べて下さい. また, 現在では, これらの本は流通していないと思いますので, 図書館等で借りて呼んで下さい.

上記の本以外に, Maple Programming Guide(英語) が, 電子書籍として無料で読めるようです.

## 4 Maxima の導入

無料の数式処理系で古くからある有名なものとして, Maxima(macsyma) とそれを拡張した, Sage があります. Maple からは, 少しだけ機能が劣るようですが, これらをネットから取ってきて使うという手もあります. Maxima は比較的汎用な数式処理ソフトですが, Maxima 以外にも数学計算のための無料ソフトが沢山あり, これらのうち, 有用なものをまとめて使えるようにしたものが, Sage です. Sage は python というプログラミング言語を制御用の言語として用いて, 様々な数学ソフトを一括して利用できるようにしているのですが, 少し使ってみた感じでは, うまく動かない部分も多いようです(現時点では無理に纏めるより, 個々に使った方が良いと思えます).

ここでは, Maxima をグラフィカルに使えるようにした wxMaxima のインストール方法を OS 別に解説します.

使い方は以下の文献を参考に自習して下さい.

### 入門的なもの

[http://www.k-techlabo.org/www\\_maxima/maxima\\_main.pdf](http://www.k-techlabo.org/www_maxima/maxima_main.pdf)  
<https://home.hirosaki-u.ac.jp/heroic-2020/wp-content/uploads/sites/25/wxmaxima.pdf>

### 本格的な読み物(分量多い)

<http://fe.math.kobe-u.ac.jp/MathLibre-doc/ponpoko/MaximaBook.pdf>

## Windows

Windows は下の場所から最新版をダウンロードして, ダブルクリックするだけです.

<https://sourceforge.net/projects/maxima/files/Maxima-Windows/>  
最近の PC だと 64 bit 版が正解だと思います.

## Mac

上で示した SourceForge のサイトには、Mac 用は、ソースコードだけがあるようです。まず、MacPorts というシステムを導入して、その後 SourceForge にあるソースコードをコンパイルして実行ファイルを作る形になるようです。残念ながら、私は、MacPorts を利用していないので、この方法の解説はできません。

上のことが面倒な場合、Home Brew を利用してインストールする方法もあります。まず、下の場所から、Home Brew を導入します。

```
https://brew.sh/index_ja  
その後、ターミナルで、
```

```
brew install wxmaxima
```

を実行すると、wxMaxima がネットから自動的にインストールされます。この場合、wxMaxima を利用するには、ターミナルから、次のようにタイプして ENTER キーを押します。

```
wxmaxima
```

## ChromeOS

ChromeOS の場合、Linux 環境のターミナルで、

```
sudo apt-get install wxmaxima
```

で導入されます。wxMaxima の起動も、Mac と同様にターミナルから、次のようにタイプして ENTER キーを押します。

```
wxmaxima
```

ChromeOS では、メニューとかが英語のままかもしれません（私が実験したときには、そうなった）。その際には、

```
sudo apt-get install locales-all  
export LANG=ja_JP.utf-8
```

とした後、wxMaxima を起動すれば、日本語メニューが出ます。

このうち、上の locales-all を導入するコマンドは 1 回で OK になりますが、下の export の部分は、毎回実行する必要があります。この面倒を避けるには、.bashrc を編集する必要がありますが、Chrome の Text では、このファイルを編集できません。ターミナルから、vim というエディタを利用すると、このファイルが編集できます。このファイルの最後に export LANG=ja\_JP.utf-8 と記述した行を付け加えます。vim の使い方は、ネットを調べて下さい。

## MathLibre

上に述べた Maxima や、これ以外の数学用の無料ソフトをパッケージ化し Linux 上にまとめたものとして、MathLibre (<http://www.mathlibre.org/index-ja.html>) というものが日本で開発されています。USB メモリから起動可能で、USB 3.0 ならそこそこ実用的なのですが、Intel 系の CPU でしか動作しない（最近の Mac はダメ）、PC の BIOS(Basic Input Output System) の Secure Boot を回避するのが面倒などの問題があります。